МАТЕМАТИКА

в схемах и таблицах

Алгебра

Линейные уравнения

$ax=b$, где a, b – числа, x – неизвестное	если $a \neq 0$, то $x=\frac{b}{a}$ – один корень
	если $a = 0$, $b \neq 0$, то корней нет
	если $a = 0$, $b = 0$, то корней бесконечное множество

Способы разложения на множители

1. Вынесение общего множителя за скобки $2ab^2-4a^2c=2a\cdot(b^2-2ac)$
2. Способ группировки $\underline{3a}+\underline{6b}-\underline{a^2}-\underline{2ab}=3\cdot(a+2b)-a(a+2b)=(a+2b)(3-a)$
3. Формулы сокращенного умножения:

Формулы	Примеры
1. $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$	$9-x^4=3^2-(x^2)^2=(3-x^2)(3+x^2)$; $(2n-5)(5+2n)=(2n)^2-5^2=4n^2-25$
2. $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$	$(4+3z)^2=16+24z+9z^2$ $25-10y+y^2=5^2-2\cdot 5\cdot y+y^2=(5-y)^2$
3. $a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$	$27-a^6=3^3-(a^2)^3=(3-a^2)(9-3a^2+a^4)$ $(4+x)(16-4x+x^2)=4^3+x^3=64+x^3$
4. $(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$	$(2-n)^3=8-12n+6n^2-n^3$ $343+21x^{10}+147x^5+x^{15}=(7+x^5)^3$

Действия с алгебраическими дробями

Основное свойство дроби: $\frac{a}{b}=\frac{a\cdot m}{b\cdot m}$, $b\neq 0$, $m\neq 0$

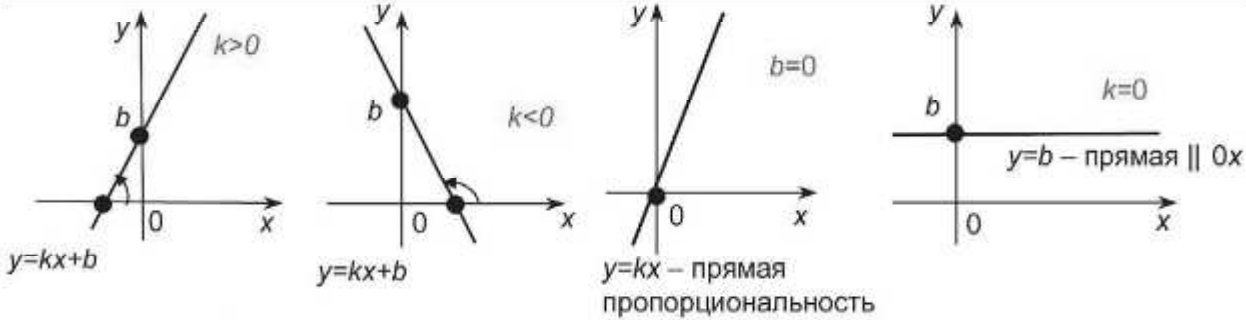
1. $\frac{a}{m}+\frac{b}{m}=\frac{a+b}{m}$	$\frac{x}{y+1}+\frac{2}{y+1}=\frac{x+2}{y+1}$
2. $\frac{a}{m}\pm\frac{b}{m}=\frac{a\pm b}{m}$	$\frac{3}{1+x^3}-\frac{x}{1-x^3}=\frac{3-x}{1-x^3}$
3. $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$	$\frac{x}{4}\cdot\frac{8}{(x-1)}=\frac{8x}{4\cdot(x-1)}=\frac{2x}{x-1}$
4. $\frac{a}{m}+\frac{b}{n}=\frac{a\cdot n+b\cdot m}{mn}$	$\frac{3a}{b}+\frac{7n^2}{a}=\frac{3a^2+7bn^2}{ab}$
5. $\frac{a}{m}\pm\frac{b}{n}=\frac{a\cdot n\pm b\cdot m}{mn}$	$\frac{5\pm x}{3}\pm\frac{x}{2y}=\frac{2y(5\pm x)\pm 3x}{6y}$

Функция

Переменная величина y называется **функцией** переменной величины x, если каждому значению переменной x соответствует единственное значение переменной y.
$y=f(x)$, y – функция, **зависимая переменная**, x – аргумент, **независимая переменная**.
Область определения функции – множество значений x, для которых функция определена. Обозначается: $a(f)$.
Область значений функции – множество значений y, которые она принимает на всей области определения. Обозначается: $b(f)$.

Линейная функция

Функция вида $y=kx+b$, где k, b – числа, называется **линейной функцией**.
Графиком линейной функции является прямая, k – угловой коэффициент, если $k>0$, то угол наклона прямой – острый, если $k<0$, то угол наклона прямой – тупой, b – показывает, в какой точке график пересекает ось ординат.



Исследование линейной функции $y=kx+b$; $k\neq0$, $b\neq0$

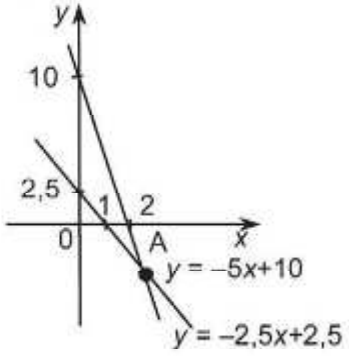
1. О.О.Ф. $x\in R$	
2. О.З.Ф. $y\in R$	
3. Нули функции $kx+b=0$; $x=-\frac{b}{k}$	точка пересечения графика функции с осью абсцисс
4. Знакопостоянство: если $k>0$, то если $k<0$, то	 $y>0$, если $x\in\left(-\frac{b}{k};+\infty\right)$; $y<0$, если $x\in\left(-\infty;-\frac{b}{k}\right)$ $y>0$, если $x\in\left(-\infty;-\frac{b}{k}\right)$; $y<0$, если $x\in\left(-\frac{b}{k};+\infty\right)$
5. Монотонность:	если $k>0$, то $y\uparrow$, при $x\in R$; если $k<0$, то $y\downarrow$, при $x\in R$.

Системы линейных уравнений

$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$; $a_{1,2}$; $b_{1,2}$; $c_{1,2}$ – числа; x, y – неизвестные

Решить систему уравнений – значит найти все пары чисел (x, y), являющиеся решением, или установить, что их нет.

Способы решения систем уравнений

Способ подстановки	Способ сложения	Графический способ
$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + 3y = 5 \end{cases}$ $\begin{cases} y = 2x \pm 3 \\ x + 3(2x \pm 3) = 5 \end{cases}$ $\begin{cases} y = 2x \pm 3 \\ 7x = 14 \end{cases}$ $\begin{cases} y = 1 \\ x = 2 \end{cases}$ Ответ: (2; 1)	$\begin{cases} 2x - 5y = 3 \\ 3x + y = -4 \quad \lvert \cdot 5 \end{cases}$ $+\begin{cases} 2x \pm 5y = 3 \\ 15x + 5y = \pm 20 \end{cases}$ $\begin{cases} 17x = \pm 17 \\ 3x + y = \pm 4 \end{cases}$ $\begin{cases} x = \pm 1 \\ y = \pm 3x \pm 4 \end{cases}$ $\begin{cases} x = \pm 1 \\ y = \pm 1 \end{cases}$ Ответ: (–1; –1).	$\begin{cases} 5x + y = 10 \\ 5x + 2y = 5 \end{cases}$ $\begin{cases} y = \pm 5x + 10 \\ y = \pm 2{,}5x + 2{,}5 \end{cases}$  Ответ: (3;–5)

Пусть прямые l_1 и l_2 заданы уравнениями l_1: $y=k_1x+b_1$ и l_2: $y=k_2x+b_2$.
если $k_1=k_2$, $b_1\neq b_2$, то $l_1 \parallel l_2$ и система $\begin{cases} y=k_1x+b_1 \\ y=k_2x+b_2 \end{cases}$ решения не имеет
если $k_1\neq k_2$, b_1, b_2 – любые, то $l_1 \cap l_2$ и система $\begin{cases} y=k_1x+b_1 \\ y=k_2x+b_2 \end{cases}$ имеет одно решение
если $\frac{k_1}{k_2}=\frac{b_1}{b_2}$, то l_1, l_2 совпадают и система $\begin{cases} y=k_1x+b_1 \\ y=k_2x+b_2 \end{cases}$ имеет бесконечное множество решений.

Универсальные обозначения

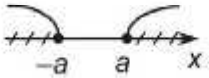
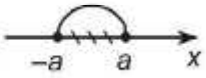
N	множество натуральных чисел. Натуральными числами называются числа, употребляемые при счете. Самое маленькое натуральное число 1. 1; 2; 3; 4; ...; 1000; 1001; 1002; ...
Z	множество целых чисел. Целыми числами называются натуральные числа, им противоположные числа и ноль. 0; ±1; ±2; ±3; ...
Q	множество рациональных чисел. Рациональными числами называются числа, которые можно представить в виде дроби $\frac{m}{n}$, где $m \in Z$, $n \in Z$.
	иррациональными числами называются бесконечные десятичные непериодические дроби
R	множество действительных чисел. Действительные числа – множество рациональных и иррациональных чисел

Модуль числа

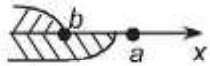
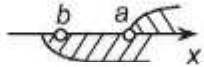
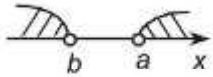
$$|a| = \begin{cases} a, \text{ если } a \geq 0 \\ -a, \text{ если } a < 0 \end{cases}$$

Уравнение $|x|=a$	
если $a>0$	$x_1=a$, $x_2=-a$ – два корня
если $a=0$	$x=0$ – один корень
если $a<0$	то корней нет

Неравенства

$\|x\|\geq a$	$\|x\|\leq a$
если $a>0$, то $\left[\begin{array}{l} x\geq a \\ x\leq -a \end{array}\right.$  $x\in(-\infty; -a][a; +\infty)$	если $a>0$, то $\begin{cases} x\leq a \\ x\geq -a \end{cases}$  $x\in[-a, a]$
если $a=0$, то $x=0$	если $a=0$, то $x=0$
если $a<0$, то $x\in R$	если $a<0$, то решения нет

Системы линейных неравенств

$\begin{cases} x \le a \\ x > b \end{cases}$	$b<x\le a$		$(b; a]$	полуинтервал
$\begin{cases} x < a \\ x > b \end{cases}$	$b<x<a$		$(b; a)$	интервал
$\begin{cases} x \ge b \\ x \le a \end{cases}$	$b\le x\le a$		$[b; a]$	отрезок
$\begin{cases} x \le a \\ x \le b \end{cases}$			$(-\infty; b]$	луч
$\begin{cases} x > a \\ x > b \end{cases}$			$(a; +\infty)$	интервал
$\begin{cases} x < a \\ x > b \end{cases}$			нет решения	

Степень числа

Степенью числа a с натуральным показателем n, больше 1, называется произведение n множителей, каждый из которых равен a.
$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}}$, a – основание степени, n – показатель степени.

Свойства степени	Примеры
1. $a^1=a$	$17^1=17$; $\left(\frac{2}{3}\right)^1=\frac{2}{3}$
2. $a^n \cdot a^m=a^{n+m}$	$5^2 \cdot 5^6=5^8$
3. $a^n : a^m=a^{n-m}$	$3^{17}:3^{15}=3^2$
4. $(a^n)^m=a^{nm}$	$(2^7)^3=2^{21}$
5. $(ab)^n=a^n b^n$	$6^2=(2 \cdot 3)^2=2^2 \cdot 3^2$
6. $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$	$\left(\frac{2}{7}\right)^3=\frac{2^3}{7^3}$

С целым показателем	Степень с рациональным показателем
a^n, $n \in Z$, $a \neq 0$	a^p, $p \in R$, $a \geq 0$, $p=\frac{m}{n}$ где $m \in Z$, $n \in N$
$a^{-n}=\frac{1}{a^n}=\left(\frac{1}{a}\right)^n$	$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$, $a>0$
$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^n$	$a^{\frac{m}{n}}=0$, если $a=0, \frac{m}{n}>0$

Арифметический квадратный корень

Арифметическим квадратным корнем из числа a называется неотрицательное число b, квадрат которого равен a. $\sqrt{a}=b:\begin{cases}1)\, b\geq 0\\ 2)\, b^2=a\end{cases}$, $a\geq 0$

Свойства	Примеры
1. $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$, $a\geq 0$, $b\geq 0$	$\sqrt{225}=\sqrt{25\cdot 9}=\sqrt{25}\cdot\sqrt{9}=5\cdot 3=15$
2. $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, $a\geq 0$, $b>0$	$\sqrt{\frac{18}{50}}=\sqrt{\frac{9}{25}}=\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{25}}=\frac{3}{5}$
3. $\sqrt{a^2}=\lvert a\rvert$, a – любое	$\sqrt{4x^4}=\lvert 2x^2\rvert=2x^2$, x – любое
4. $\left(\sqrt{a}\right)^2=a$, $a\geq 0$	$\left(\sqrt{7y}\right)^2=7y$, $y\geq 0$

Арифметическим корнем натуральной степени $n\geq 2$ из неотрицательного числа a называется неотрицательное число, n–я степень которого равна a. $\sqrt[n]{a}=b:\begin{cases}1)\, b\geq 0\\ 2)\, b^n=a\end{cases}$, $a\geq 0$.

Свойства	Примеры
1. $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$, $a\geq 0$, $b\geq 0$	$\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{27}=\sqrt[3]{3^3}=3$
2. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $a\geq 0$, $b>0$	$\frac{\sqrt[4]{3125}}{\sqrt[4]{5}}=\sqrt[4]{\frac{3125}{5}}=\sqrt[4]{625}=\sqrt[4]{5^4}=5$
3. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m}$, $a\geq 0$	$\left(\sqrt[6]{4}\right)^3=\sqrt[6]{4^3}=\sqrt[6]{2^6}=2$
4. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[m\cdot n]{a}$, $a\geq 0$	$\sqrt[3]{\sqrt{729}}=\sqrt[6]{729}=\sqrt[6]{3^6}=3$
5. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a$, $a\geq 0$	$\left(\sqrt[5]{2}\right)^5=2$
6. $\sqrt[2k]{a^{2k}}=\lvert a\rvert$, где $k\in N$, a – любое	$\sqrt[8]{256}=\sqrt[8]{2^8}=2$

Таблица квадратов натуральных чисел от 10 до 99

Единицы / Десятки	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8449	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

Квадратные уравнения

Уравнения вида $ax^2+bx+c=0$, где $a\neq0$, b, c – числа, x – неизвестное, называется квадратным уравнением.
Уравнения $ax^2=0$; $ax^2+bx=0$; $ax^2+c=0$ называются неполными квадратными уравнениями.

Пример:			
$3x^2-7x+1=0$;	$5x^2=0$	$-x^2-\frac{1}{3}x=0$	$1{,}5x^2+9=0$
$a=3$; $b=-7$; $c=1$	$a=5$; $b=c=0$	$a=-1$; $b=\pm\frac{1}{3}$; $c=0$	$a=1{,}5$; $c=9$

Решение квадратных уравнений

Уравнения	Примеры
1) $ax^2=0$; $x_1=0$, один корень	1) $\frac{1}{17}x^2=0$; $x^2=0$; $x=0$
2) $ax^2+bx=0$; $x\cdot(ax+b)=0$; $\left[\begin{array}{l} x=0 \\ ax+b=0 \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} x_1=0 \\ x_2=-\frac{b}{a} \end{array}\right.$ два корня	2) $-3x^2+5x=0$; $-x(3x-5)=0$; $\left[\begin{array}{l} -x=0 \\ 3x-5=0 \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} x_1=0 \\ x_2=1\frac{2}{3} \end{array}\right.$
3) $ax^2+c=0$; $x^2=-\frac{c}{a}$ имеет решение, если $-\frac{c}{a}>0$; $x_1=\sqrt{-\frac{c}{a}}$, $x_2=-\sqrt{-\frac{c}{a}}$ два корня. Не имеет решений, если $-\frac{c}{a}<0$.	3) $6x^2-9=0$; $x^2=\frac{3}{2}$; $x_1=\sqrt{\frac{3}{2}}$; $x_2=-\sqrt{\frac{3}{2}}$; $2x^2+8=0$; $x^2=-4$; решений нет.
4) $ax^2+bx+c=0$; $D=b^2-4ac$ Если $D>0$, то $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$ два корня. Если $D=0$, то $x_1=-\frac{b}{2a}$ один корень. Если $D<0$, то корней нет.	4) $2x^2-x-1=0$; $a=2$; $b=-1$; $c=-1$; $D=(-1)^2-4\cdot2\cdot(-1)=9$; $D=9$; $x_{1,2}=\frac{1\pm3}{4}$; $x_1=1$; $x_2=-\frac{1}{2}$. Ответ: 1; $-\frac{1}{2}$. $9x^2+6x+1=0$; $a=9$; $b=6$; $c=1$; $\frac{D}{4}=3^2-9\cdot1=0$; $x_1=-\frac{6}{18}$; $x_1=-\frac{1}{3}$. Ответ: $-\frac{1}{3}$.
5) $ax^2+bx+c=0$; если число b четное, то применяем формулу $\frac{D}{4}=\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac$; $x_{1,2}=\frac{-\frac{b}{2}\pm\sqrt{\frac{D}{4}}}{a}$	5) $5x^2-7x+10=0$; $a=5$; $b=-7$; $c=10$; $D=(-7)^2-4\cdot5\cdot10=-153<0$, корней нет. Ответ: $\varnothing$.
6) Если старший коэффициент равен 1, то квадратное уравнение называется приведенным $x^2+px+q=0$. По теореме Виета: $\begin{cases} x_1\cdot x_2=q \\ x_1+x_2=-p \end{cases}$	6) $x^2-5x-6=0$; $\begin{cases} x_1\cdot x_2=-6 \\ x_1+x_2=5 \end{cases}$; $x_1=6$, $x_2=-1$. Ответ: 6; -1.

Разложение квадратного трехчлена на множители

$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, где x_1, x_2 – корни уравнения $ax^2+bx+c=0$

Пример: $2x^2-x-5=2\left(x-\frac{5}{2}\right)(x+2)=(2x-5)(x+2)$. Так как $2x^2-x-5=0$; $a=81$, $x_{1,2}=\frac{1\pm 9}{4}$, $x_1=\frac{5}{2}$, $x_2=-2$.

Квадратичная функция

Функция вида $y=ax^2+bx+c$, где $a\neq 0$, b, c – числа; x – независимая переменная, называется квадратичной функцией.

1. $y=x^2$

а) О.О.Ф. $x\in R$

б) О.З.Ф. $y\in[0; +\infty)$

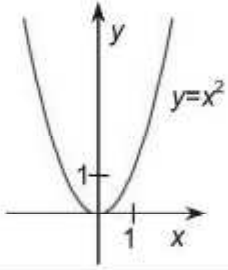
в) нули функции: $x=0$

г) Монотонность функции

$y\uparrow$, если $x\in[0; +\infty)$

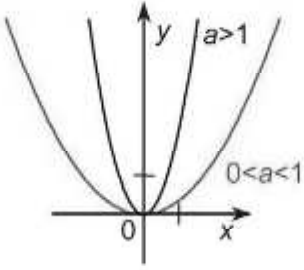
$y\downarrow$, если $x\in(-\infty; 0]$

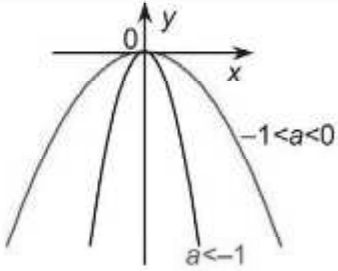
д) ось симметрии – ось ординат



2. $y=ax^2$

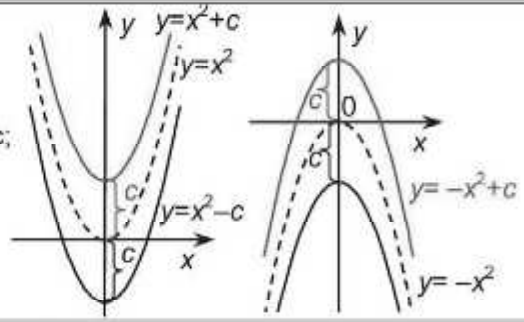
Коэффициент a отвечает за сужение параболы вдоль оси ординат; если $|a|<1$, то ветви расположены дальше от OY; если $|a|>1$, то ветви расположены ближе к OY.





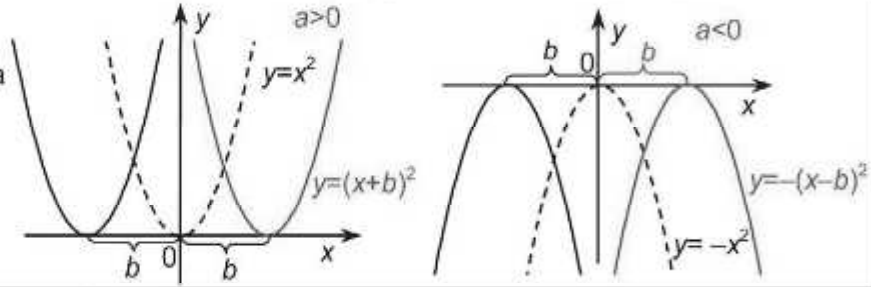
3. $y=x^2+c$

Коэффициент c отвечает за перемещение параболы вдоль оси ординат;
если $c>0$, то график $y=x^2$ поднимается вверх на c;
если $c<0$, то график $y=x^2$ опускается вниз на c.

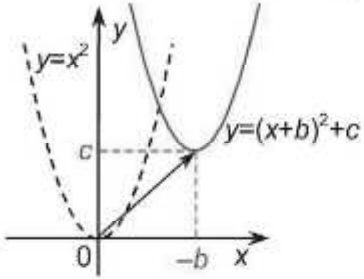


4. $y=(x+b)^2$

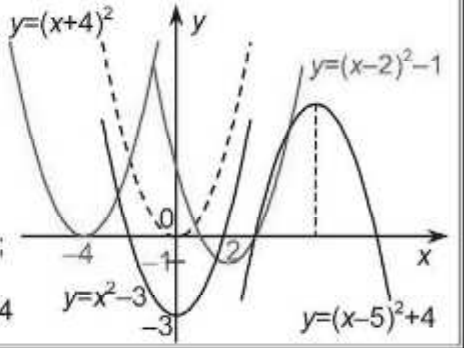
Коэффициент b отвечает за перемещение вдоль оси OX; если $b>0$, то влево на b единиц от 0; если $b<0$, то вправо на b единиц от 0.



5. $y=(x+b)^2+c$



Пример:
$y=x^2-3$;
$y=(x-2)^2-1$;
$y=(x+4)^2$;
$y=-(x-5)^2+4$



Квадратные неравенства

Неравенства вида $ax^2+bx+c>0$ называются квадратными, где $a\neq0$, b, c – числа.

Способы решения квадратных неравенств

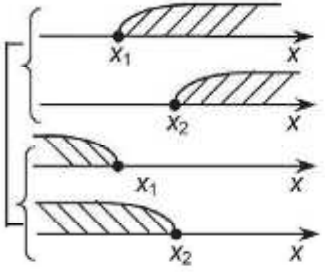
1. Аналитический способ

Решить уравнение $ax^2+bx+x=0$, разложить на множители и решить соответствующие системы:

$$\boldsymbol{ax^2+bx+x\geq0,\ a>0}$$

1) Если $a>0$, то x_1, x_2 – корни уравнения, значит, $a(x-x_1)(x-x_2)\geq0$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-x_1\geq 0\\ x-x_2\geq 0\end{cases}\\ \begin{cases}x-x_1\leq 0\\ x-x_2\leq 0\end{cases}\end{array}\right.$$



$\Rightarrow x\in[x_2;+\infty)$

$\Rightarrow x\in(-\infty;x_1]$

Ответ: $x\in(-\infty;x_1]\cup[x_2;+\infty)$.

2) если $a=0$, то x_1 – корень, значит, $a(x-x_1)^2\geq0$

Так как $a>0$ $(x-x_1)^2\geq0$ при любых значениях x, то решением неравенства является множество всех действительных чисел.

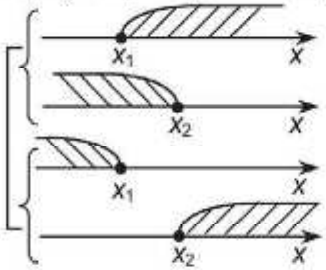
Ответ: $x\in R$.

3) если $a<0$, то уравнение корней не имеет, значит $\left.\begin{cases}ax^2+bx+c>0\\ a>0\end{cases}\right|\Rightarrow x\in R$.

$ax^2+bx+c\geq 0,\ a<0$

1) Если $a>0$, то x_1, x_2 – корни уравнения, значит, $a(x-x_1)(x-x_2)\geq 0$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-x_1\geq 0\\ x-x_2\leq 0\end{cases}\\ \begin{cases}x-x_1\leq 0\\ x-x_2\geq 0\end{cases}\end{array}\right.$$



$\Rightarrow x\in[x_1;\ x_2]$

$\Rightarrow x\in\varnothing$

Ответ: $x\in[x_1;\ x_2]$.

2) Если $a=0$, то x_1– корень, значит, $a(x-x_1)^2\geq 0$; так как $a<0$, $(x-x_1)^2\geq 0$ при любых значениях x, то $a(x-x_1)^2\geq 0$ только при $x=x_1$, в остальных случаях выражение будет принимать отрицательное значение.

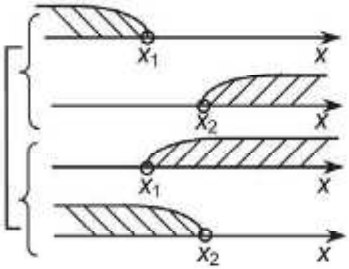
Ответ: $x=x_1$.

3) Если $a<0$, то уравнение корней не имеет, значит, $\begin{cases}ax^2+bx+c>0\\ a<0\end{cases}\Rightarrow x\in\varnothing$.

$ax^2+bx+c<0,\ a>0$

1) Если $a>0$, то x_1, x_2 – корни, значит, $a(x-x_1)(x-x_2)<0$.

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-x_1<0\\ x-x_2>0\end{cases}\\ \begin{cases}x-x_1>0\\ x-x_2<0\end{cases}\end{array}\right.$$



$\Rightarrow x\in\varnothing$

$\Rightarrow x\in(x_1;\ x_2)$

Ответ: $x\in(x_1,x_2)$.

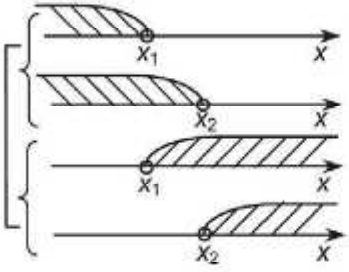
2) Если $a=0$, то x_1 – корень, значит, $a(x-x_1)^2>0$. Так как $a>0$ и $(x-x_1)^2<0$ при любых значениях, кроме $x=x_1$, то неравенство не имеет решений.
Ответ: $x \in \varnothing$.

3) Если $a<0$, то уравнение корней не имеет, значит, $\begin{cases} ax^2+bx+c<0 \\ a>0 \end{cases} \Rightarrow x \in \varnothing$

$ax^2+bx+c<0$, $a<0$

1) Если $a>0$, то x_1, x_2 – корни уравнения, значит, $a(x-x_1)(x-x_2)<0$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-x_1<0 \\ x-x_2<0 \end{cases} \\ \begin{cases} x-x_1>0 \\ x-x_2>0 \end{cases} \end{array}\right.$$



$\Rightarrow x \in (-\infty;\ x_1)$

$\Rightarrow x \in (x_2;\ +\infty)$

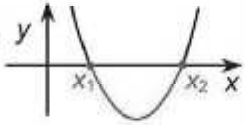
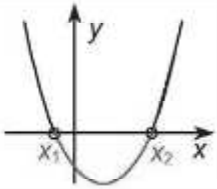
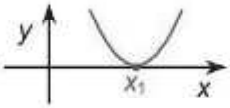
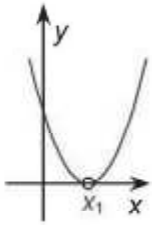
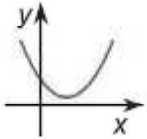
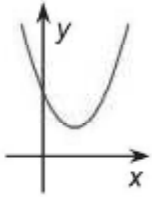
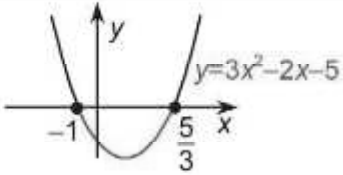
Ответ: $x \in (-\infty;\ x_1) \cup (x_2;\ +\infty)$.

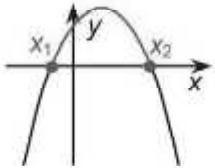
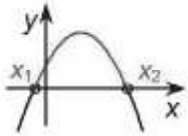
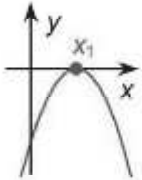
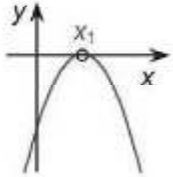
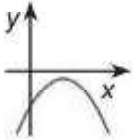
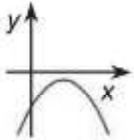
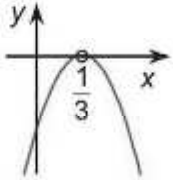
2) Если $a=0$, то x_1 – корень, значит, $a(x-x_1)^2<0$. Так как $a<0$ и $(x-x_1)^2>0$ при любых значениях x, кроме $x=x_1$, то $a(x-x_1)^2<0$ при любых значениях x, кроме $x=x_1$.
Ответ: $x \neq x_1$, (или $x \in (-\infty;\ x_1) \cup (x_1;\ +\infty)$).

3) Если $a<0$, то уравнение корней не имеет, значит, $\begin{cases} ax^2+bx+c<0 \\ a<0 \end{cases} \Rightarrow x \in R$

2. Графический способ

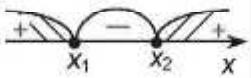
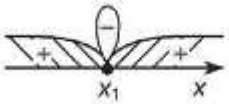
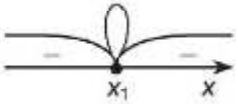
Решить уравнение $ax^2+bx+c=0$ и схематично построить график функции:

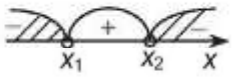
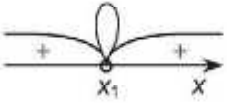
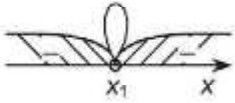
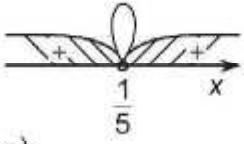
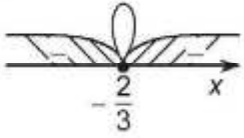
$ax^2+bx+c\geq 0,\ a>0$	$ax^2+bx+c<0,\ a>0$
Если $a>0$, то x_1, x_2 – корни. Ответ: $x\in(-\infty;\ x_1]\cup[x_2;\ +\infty)$. 	Если $a>0$, то x_1, x_2 – корни. Ответ: $x\in(x_1;\ x_2)$. 
Если $a=0$, то x_1 – корень. Ответ: $x\in R$. 	Если $a=0$, то x_1 – корень. Ответ: $x\in\varnothing$. 
Если $a<0$, то корней нет. Ответ: $x\in R$. 	Если $a<0$, то корней нет. Ответ: $x\in\varnothing$. 
Пример: $3x^2-2x-5\leq 0$. Рассмотрим $3x^2-2x-5=0$. $\frac{D}{4}=1+15=16$; $x_{1,2}=\frac{1\pm 4}{3}$; $x_1=\frac{5}{3}$, $x_2=-1$. Ответ: $x\in\left[-1;\ \frac{5}{3}\right]$. 	

$ax^2+bx+c\geq 0$, $a<0$	$ax^2+bx+c<0$, $a<0$
Если $a>0$, то x_1, x_2 – корни. Ответ: $x\in[x_1; x_2]$. 	Если $a>0$, то x_1, x_2 – корни. Ответ: $x\in(-\infty; x_1)\cup(x_2; +\infty)$. 
Если $a=0$, то x_1 – корень. Ответ: $x=x_1$. 	Если $a=0$, то x_1 – корень. Ответ: $x\in(-\infty; x_1)\cup(x_1; +\infty)$. 
Если $a<0$, то корней нет. Ответ: $x\in\varnothing$. 	Если $a<0$, то корней нет. Ответ: $x\in R$. 
Пример: $-9x^2+6x-1>0$. Рассм. $-9x^2+6x-1=0$; $-(-9x^2-6x+1)=0$; $-(3x-1)^2=0$; $x=\frac{1}{3}$. Ответ: $x\in\varnothing$. 	

Метод интервалов

Решить уравнение $ax^2+bx+c=0$ и нанести корни уравнения на числовую прямую. На каждом из образовавшихся интервалов определить знак выражения по старшему коэффициенту.

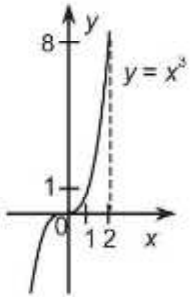
$ax^2+bx+c\geq 0,\ a>0$	$ax^2+bx+c\geq 0,\ a<0$
Если $a>0$, то x_1, x_2 – корни. Ответ: $x\in(-\infty;\ x_1]\cup[x_2;\ +\infty)$.  Если старший коэффициент $a>0$, то крайний правый интервал положительный. Далее знаки интервала чередуются.	Если $a>0$, то x_1, x_2 – корни. Ответ: $x\in[x_1,x_2]$.  Если старший коэффициент $a<0$, то крайний правый интервал отрицательный. Далее знаки интервалов чередуются.
Если $a=0$, то x_1 – корень. Ответ: $x\in R$.  Если x_1– корень четной кратности, то чередования знаков у интервалов не происходит.	Если $a=0$, то x_1 – корень. Ответ: $x=x_1$. 
Если $a<0$, то корней нет. Ответ: $x\in R$.  Так как $a>0$ и трехчлен больше нуля, то решением неравенства является множество всех действительных чисел.	Если $a<0$, то корней нет. Ответ: $x\in\varnothing$.  Так как $a<0$, a трехчлен больше нуля, то неравенство решения не имеет.

$ax^2+bx+c<0$, $a>0$	$ax^2+bx+c<0$, $a<0$
Если $a>0$, то x_1, x_2 – корни. Ответ: $x \in (x_1; x_2)$. 	Если $a>0$, то x_1, x_2 – корни. Ответ: $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$. 
Если $a=0$, то x_1 – корень. Ответ: $x \in \varnothing$. 	Если $a=0$, то x_1 – корень. Ответ: $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_1; +\infty)$. 
Если $a<0$, то корней нет. Ответ: $x \in \varnothing$.  Так как $a>0$, а трехчлен меньше нуля, значит, неравенство решения не имеет.	Если $a<0$, то корней нет. Ответ: $x \in R$.  Так как $a<0$ и трехчлен меньше нуля, значит, решением неравенства является множество всех действительных чисел.
Пример:	
$25x^2-10x+1>0$ Рассмотрим $25x^2-10x+1>0$. $(5x-1)^2=0$; $x=\frac{1}{5}$.  Ответ: $x \in (-\infty; \frac{1}{5}) \cup (\frac{1}{5}; +\infty)$.	$-4-12x-9x^2 \le 0$ Рассмотрим $-9x^2-12x-4=0$. $-(3x+2)^2=0$; $x=\pm\frac{2}{3}$.  Ответ: $x \in R$.

Степенная функция

Функция $y=x^3$

График функции – кубическая парабола.
1) О.О.Ф. $x \in R$
2) О.З.Ф. $y \in R$
3) нули функции $x=0$
4) знакопостоянство:
$y>0$, если $x \in (0; +\infty)$,
$y<0$, если $x \in (-\infty; 0)$
5) монотонность: $y\uparrow$, если $x \in R$
6) начало отсчета – центр симметрии

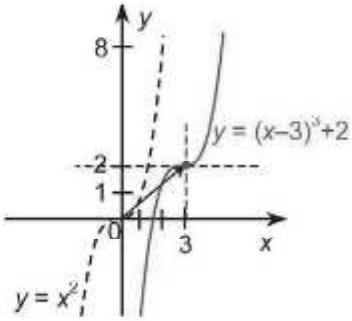


$y=(x+a)^3+b$

число a – отвечает за перемещение вдоль оси OX;
если $a>0$, то влево на a единиц от 0;
если $a<0$, то вправо на a единиц от 0.

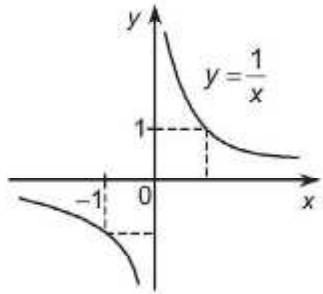
число b – отвечает за перемещение вдоль оси OY;
если $b>0$, то вверх на b единиц от 0;
если $b<0$, то вниз на b единиц от 0.

$y=(x-3)^3+2$



Функция $y = \frac{1}{x}$

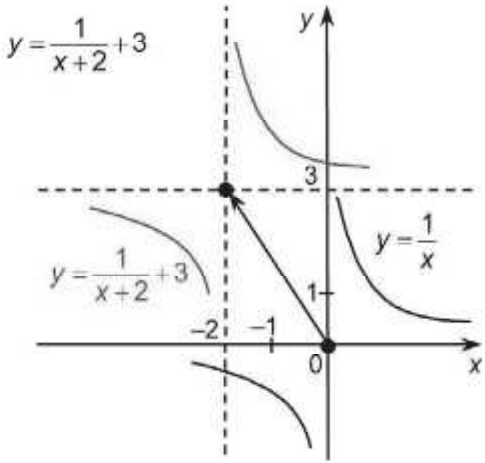
График функции – гипербола.
1) О.О.Ф $x \neq 0$
2) О.З.Ф $y \neq 0$
3) нули функции: нет
4) знакопостоянство:
$y>0$, если $x \in (0; +\infty)$,
$y<0$, если $x \in (-\infty; 0)$
5) монотонность: $y \downarrow$, если $x \neq 0$
6) начало отсчета – центр симметрии



$$y = \frac{1}{(a+x)} + b$$

число a – отвечает за перемещение вдоль оси OX;
если $a>0$, то влево на a единиц от 0;
если $a<0$, то вправо на a единиц от 0.

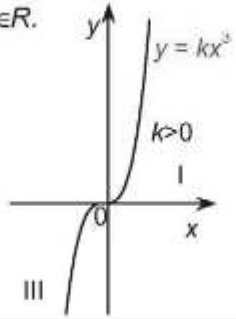
число b – отвечает за перемещение вдоль оси OY;
если $b>0$, то вверх на b единиц от 0;
если $b<0$, то вниз на b единиц от 0.



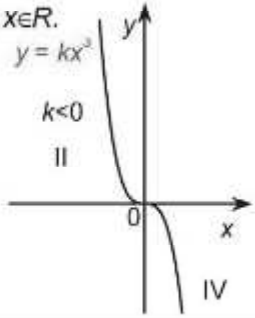
$y=kx^3$

Коэффициент k – отвечает за то, в каких координатных углах расположена кубическая парабола.

если $k>0$, то $y\uparrow$ при $x\in R$.



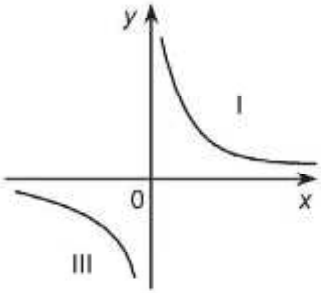
если $k<0$, то $y\downarrow$ при $x\in R$.



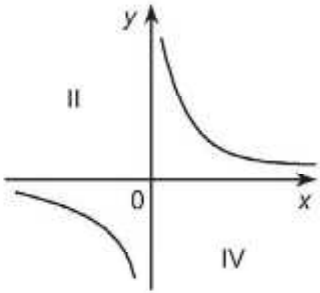
$y=\frac{k}{x}$

Коэффициент k — отвечает за то, в каких координатных углах расположена гипербола

если $k>0$, то $y\downarrow$ при $x\neq 0$.

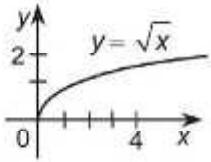


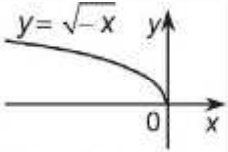
если $k<0$, то $y\uparrow$ при $x\neq 0$.



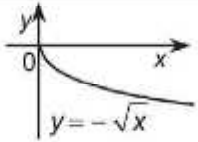
Функция $y=\sqrt{x}$

1) О.О.Ф. $x\in[0;+\infty)$
2) О.З.Ф. $y\in[0;+\infty)$
3) нули функции $x=0$
4) знакопостоянство: $y>0$, если $x\in(0;+\infty)$
5) монотонность: $y\uparrow$, если $x\in[0;+\infty)$

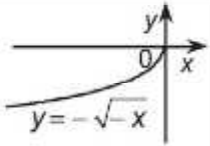




1) $x\in[-\infty;0)$
2) $y\in[0;+\infty)$
3) $x=0$
4) $y>0$, если $x\in(-\infty;0)$
5) $y\downarrow$, если $x\in(-\infty;0]$



1) $x\in[0;+\infty)$
2) $y\in(-\infty;0]$
3) $x=0$
4) $y<0$, если $x\in(0;+\infty)$
5) $y\downarrow$, если $x\in[0;+\infty)$



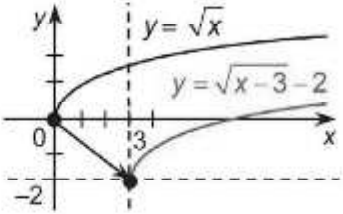
1) $x\in(-\infty;0]$
2) $y\in(-\infty;0]$
3) $x=0$
4) $y<0$, если $x\in(-\infty;0)$
5) $y\uparrow$, если $x\in(-\infty;0]$

$$y=\sqrt{x+a}+b$$

число a – отвечает за перемещение вдоль оси OX;
если $a>0$, то влево на a единиц от 0;
если $a<0$, то вправо на a единиц от 0.

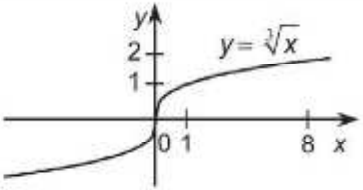
число b – отвечает за перемещение вдоль оси OY;
если $b>0$, то вверх на b единиц от 0;
если $b<0$, то вниз на b единиц от 0.

$$y=\sqrt{x-3}-2$$



Функция $y=\sqrt[3]{x}$

1) О.О.Ф. $x \in R$
2) О.З.Ф. $y \in R$
3) нули функции $x=0$
4) знакопостоянство: $y>0$, если $x>0$; $y<0$, если $x<0$
5) монотонность: $y\uparrow$, если $x \in R$



Функция $y=f(x)$ называется **возрастающей** на промежутке, если большему значению аргумента соответствует большее значение функции.

если $x_2>x_1$ и $f(x_2)>f(x_1)$, то $f(x)$ – возрастает.

Функция $y=f(x)$ называется **убывающей** на промежутке, если большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.

если $x_2>x_1$ и $f(x_2)<f(x_1)$, то $f(x)$ – убывает.

Функция $y=f(x)$ называется **четной** на всей области определения, если верно равенство $f(-x)=f(x)$. График четной функции симметричен относительно оси ординат.

Функция $y=f(x)$ называется **нечетной** на всей области определения, если верно равенство $f(-x) = -f(x)$.

График нечетной функции симметричен относительно начала отсчета.

Прогрессии

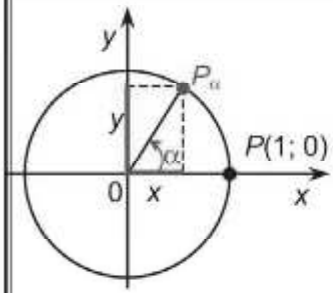
1. Числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему члену, сложенному с одним и тем же числом d, называется **арифметической прогрессией.** Число d – разность прогрессии. $a_n=a_{n-1}+d$; $d=a_n-a_{n-1}$.
формула n–члена: $a_n=a_1+(n-1)d$
свойство прогрессии: $a_n=\frac{a_{n+k}+a_{n-k}}{2}$
сумма n–членов: $S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n$ или $S_n=\frac{2a_1+(n-1)d}{2}\cdot n$

2. Числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему члену, умноженному на одно и то же число q, называется **геометрической прогрессией**.
Число q – знаменатель прогрессии. $b_n=b_{n-1}\cdot q$; $q=\frac{b_n}{b_{n-1}}$.
формула n–члена: $b_n=b_1\cdot q^{n-1}$
свойство прогрессии: $b_n=\sqrt{b_{n+k}\cdot b_{n-k}}$
сумма n–членов: $S_n=\frac{b_1\cdot(1-q^n)}{1-q}$, $q\neq1$
Если $\lvert q\rvert<1$, то прогрессия называется бесконечно убывающей геометрической прогрессией. $S=\frac{b_1}{1-q}$

Иррациональные уравнения

Уравнения вида $\sqrt{f(x)}=a$, где a – число, называется **иррациональным уравнением**. Если $a<0$, то уравнение корней не имеет; если $a\geq 0$, то $f(x)=a^2$.	
$\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)}$ $\begin{cases} f(x)\geq 0 \\ g(x)\geq 0 \\ f(x)=g(x) \end{cases}$	$\sqrt{f(x)}=g(x)$ $\begin{cases} g(x)\geq 0 \\ f(x)=g^2(x) \end{cases}$
Неравенства вида $\sqrt{f(x)}\geq a$ или $\sqrt{f(x)}<a$ называются **иррациональными неравенствами**.	
$\sqrt{f(x)}\geq a$	$\sqrt{f(x)}<a$
$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a<0 \\ f(x)\geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a\geq 0 \\ f(x)\geq 0 \\ f(x)=a^2 \end{cases} \end{array}\right.$	$\begin{cases} a>0 \\ f(x)\geq 0 \\ f(x)<a^2 \end{cases}$
$\sqrt{f(x)}>g(x)$	$\sqrt{f(x)}\leq\sqrt{g(x)}$
$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x)\geq 0 \\ f(x)\geq 0 \\ f(x)>g^2(x) \end{cases} \\ \begin{cases} g(x)<0 \\ f(x)\geq 0 \end{cases} \end{array}\right.$	$\begin{cases} f(x)\geq 0 \\ g(x)\geq 0 \\ f(x)\leq g(x) \end{cases}$

Тригонометрия



$x=\cos\alpha$; $y=\sin\alpha$

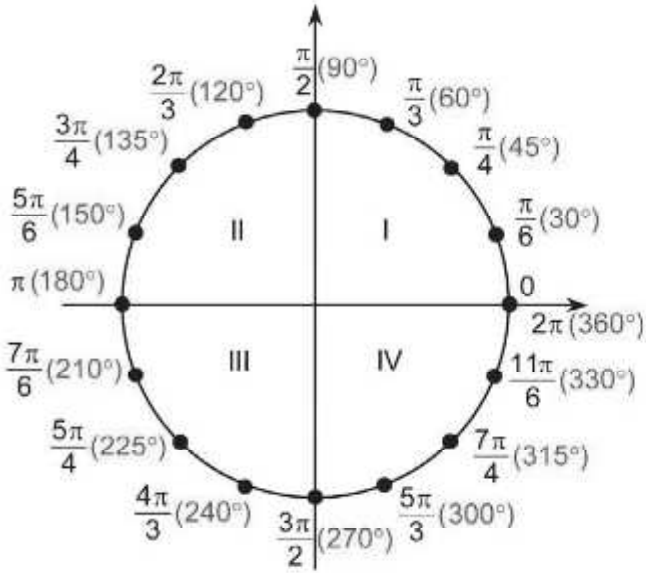
Синусом α называется ордината точки P_α полученной поворотом точки $P(1; 0)$ вокруг начала координат на угол α.

Косинусом α называется абсцисса точки P_α полученной поворотом точки $P(1;0)$ вокруг начала координат на угол α.

$P_\alpha(\cos\alpha; \sin\alpha)$.

Тангенсом α называется отношение синуса угла α к косинусу угла α.

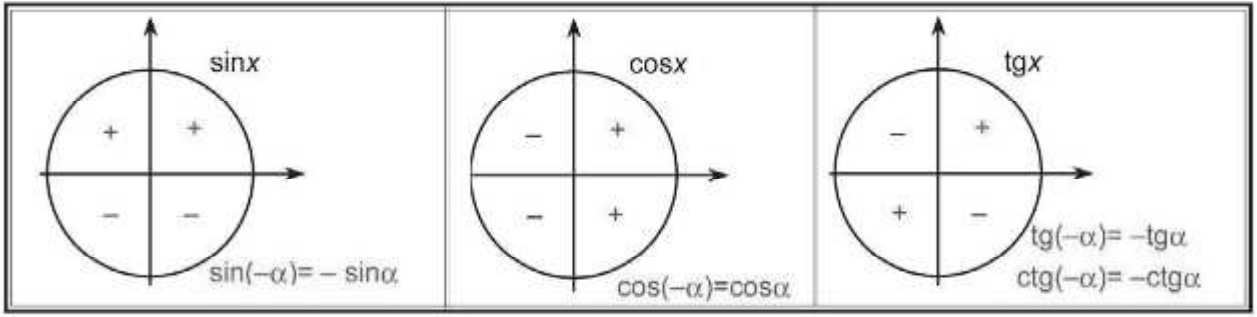
$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$



	0	$\frac{\pi}{6}$ (30°)	$\frac{\pi}{4}$ (45°)	$\frac{\pi}{3}$ (60°)	$\frac{\pi}{2}$ (90°)
sin*x*	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos*x*	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tg*x*	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞
ctg*x*	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

Основное тригонометрическое тождество

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$
$1+\mathrm{tg}^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$; $1+\mathrm{ctg}^2\alpha=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$; $\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{ctg}\alpha=1$



Формулы сложения	Примеры
$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta\pm\sin\alpha\cdot\sin\beta$	$\cos75°=\cos(45°+30°)=\cos45°\cos30°-\sin45°\sin30°=$ $=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$
$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta\pm\cos\alpha\cdot\sin\beta$	$\cos50°\sin80°-\sin50°\cos80°=\sin(80°-50°)=$ $=\sin30°=\dfrac{1}{2}$
$\mathrm{tg}(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\mathrm{tg}\alpha\pm\mathrm{tg}\beta}{1\pm\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta}$	$\mathrm{tg}150°=\mathrm{tg}(60°+45°)=\dfrac{\mathrm{tg}60°+\mathrm{tg}45°}{1-\mathrm{tg}60°\cdot\mathrm{tg}45°}=$ $=\dfrac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}}=\dfrac{4+2\sqrt{3}}{-2}=-(1+\sqrt{3})$

Формулы двойного угла	Примеры
$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$	$\sin 10x = 2\sin 5x \cdot \cos 5x$ $8\cos 3x \cdot \sin 3x = 4 \cdot (2\sin 3x \cos 3x) = 4\sin 6x$
$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$	$\cos 7x = \cos^2\frac{7x}{2} - \sin^2\frac{7x}{2}$ $\cos 16x = 2\cos^2 8x - 1$; $\cos 12x = 1 - 2\sin^2 6x$
$\mathrm{tg}\,2\alpha = \frac{2\mathrm{tg}\,\alpha}{1 - \mathrm{tg}^2\alpha}$	$\frac{2\mathrm{tg}\,2x}{1 - \mathrm{tg}^2 2x} = \mathrm{tg}\,4x$

Формулы понижения степени	Примеры
$\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$	$\sin^2 5x = \frac{1}{2}(1 - \cos 10x)$
$\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$	$(1 + \cos 8x) = 2 \cdot \left[\frac{1}{2}(1 + \cos 8x)\right] = 2\cos^2 4x$

Формулы суммы и разности синусов и косинусов	Примеры
$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha\pm\beta}{2}$	$\sin 75^\circ + \cos 75^\circ = \sin 75^\circ + \cos(90^\circ - 15^\circ) =$
$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha+\beta}{2}$	$= \sin 75^\circ + \sin 15^\circ = 2\sin\frac{75^\circ + 15^\circ}{2} \cdot \cos\frac{75^\circ - 15^\circ}{2} =$
$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$	$= 2\sin 45^\circ \cdot \cos 30^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$	$\cos\frac{11\pi}{12} - \cos\frac{5\pi}{12} = -2\sin\frac{\frac{11\pi}{12}+\frac{5\pi}{12}}{2}\cdot\sin\frac{\frac{11\pi}{12}+\frac{5\pi}{12}}{2} =$ $= -2\sin\frac{2\pi}{3}\cdot\sin\frac{\pi}{4} = -2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{6}}{2}$

$\sin x\cdot\cos y = \frac{1}{2}(\sin(x+y)+\sin(x-y))$	$2\sin 50^\circ\cdot\cos 40^\circ = \sin 90^\circ + \sin 10^\circ = 1 + \sin 10^\circ$
$\sin x\cdot\sin y = \frac{1}{2}(\cos(x-y)-\cos(x+y))$	$3\cos 20^\circ\cdot\cos 80^\circ = \frac{3}{2}(\cos 100^\circ + \cos 60^\circ) =$ $= \frac{3}{2}\cos 100^\circ + \frac{3}{4}$
$\cos x\cdot\cos y = \frac{1}{2}(\cos(x-y)+\cos(x+y))$	

Формулы приведения

α	$\frac{\pi}{2}\pm\alpha$	$\pi\pm\alpha$	$\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$	$2\pi\pm\alpha$
$\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$	$+\cos\alpha$
$\sin\alpha$	$+\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$
$\mathrm{tg}\alpha$	$\pm\mathrm{ctg}\alpha$	$\pm\mathrm{tg}\alpha$	$\pm\mathrm{ctg}\alpha$	$\pm\mathrm{tg}\alpha$
$\mathrm{ctg}\alpha$	$\pm\mathrm{tg}\alpha$	$\pm\mathrm{ctg}\alpha$	$\pm\mathrm{tg}\alpha$	$\pm\mathrm{ctg}\alpha$

Тригонометрические функции

$y=\cos x$

1) О.О.Ф. $x \in R$

2) О.З.Ф. $y \in [-1;1]$

3) Нули функции $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n \in Z$

4) Знакопостоянство:

$y>0$, если $x \in \left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n; \frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$, $n \in Z$

$y<0$, если $x \in \left(\frac{\pi}{2}+2\pi n; \frac{3\pi}{2}+2\pi n\right)$, $n \in Z$

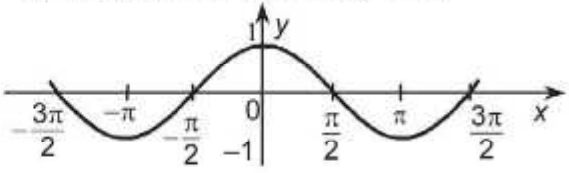
5) Монотонность:

$y\uparrow$, если $x \in [\pi+2\pi n; 2\pi+2\pi n]$, $n \in Z$

$y\downarrow$, если $x \in [0+2\pi n; \pi+2\pi n]$, $n \in Z$

6) Функция периодическая: $q=2\pi$

7) Функция четная: $\cos(-x)=\cos x$



$y=\sin x$

1) О.О.Ф. $x \in R$

2) О.З.Ф. $y \in [-1; 1]$

3) Нули функции $x=\pi k$, $k \in Z$

4) Знакопостоянство:

$y>0$, если $x \in (0+2\pi n; \pi+2\pi n)$, $n \in Z$

$y<0$, если $x \in (\pi+2\pi n; 2\pi+2\pi n)$, $n \in Z$

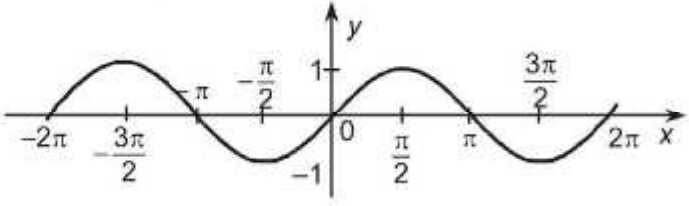
5) Монотонность:

$y\uparrow$, если $x \in \left[-\frac{\pi}{2}+2\pi n; \frac{\pi}{2}+2\pi n\right]$, $n \in Z$

$y\downarrow$, если $x \in \left[\frac{\pi}{2}+2\pi n; \frac{2\pi}{2}+2\pi n\right]$, $n \in Z$

6) Функция периодическая: $q=2\pi$

7) Функция нечетная: $\sin(-x)=-\sin x$



$y=\mathrm{tg}x$

1) О.О.Ф. $x \neq \frac{\pi}{2}+\pi k$ $k \in Z$

2) О.З.Ф. $y \in R$

3) Нули функции $x=\pi k$, $k \in Z$

4) Знакопостоянство:

$y>0$, если $x \in \left(0+\pi k; \frac{\pi}{2}+\pi k\right)$, $k \in Z$

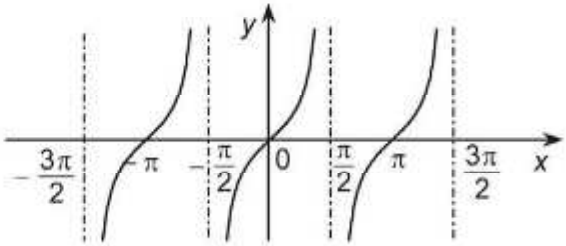
$y<0$, если $x \in \left(-\frac{\pi}{2}+\pi k; 0+\pi k\right)$, $k \in Z$

5) Монотонность:

$y\uparrow$, если $x \in \left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k; \frac{\pi}{2}+2\pi k\right)$, $k \in Z$

6) Функция периодическая: $q=\pi$

7) Функция нечетная: $\mathrm{tg}(-x)=-\mathrm{tg}x$



$y=\mathrm{ctg}x$

1) О.О.Ф. $x \neq \pi k$, $k \in Z$

2) О.З.Ф. $y \in R$

3) Нули функции $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k \in Z$

4) Знакопостоянство:

$y>0$, если $x \in \left(0+\pi k; \frac{\pi}{2}+\pi k\right)$, $k \in Z$

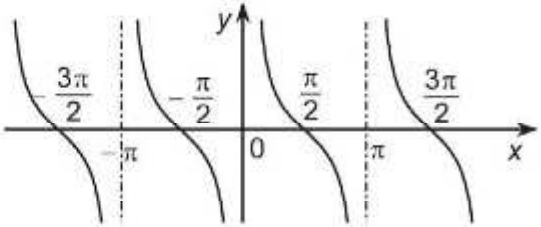
$y<0$, если $x \in \left(\frac{\pi}{2}+\pi k; \pi+\pi k\right)$, $k \in Z$

5) Монотонность:

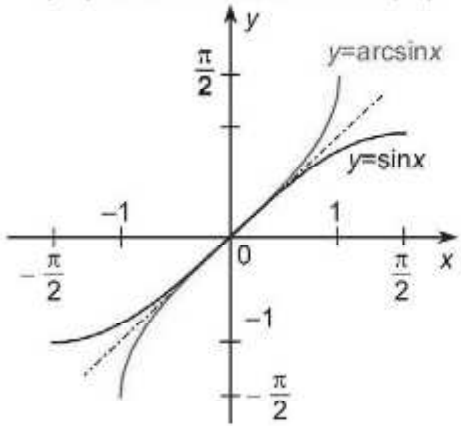
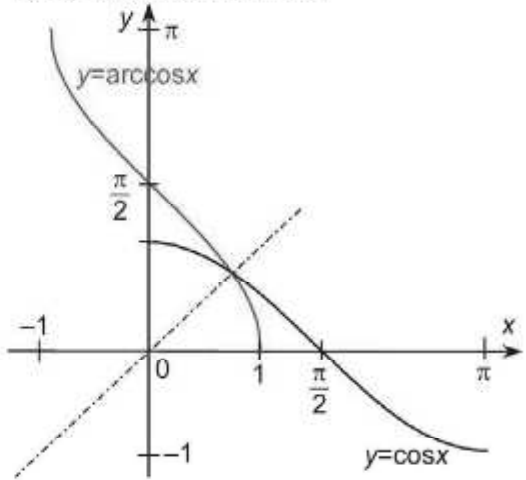
$y\downarrow$, если $x \in (0+\pi k; \pi+\pi k)$, $k \in Z$

6) Функция периодическая: $q=\pi$

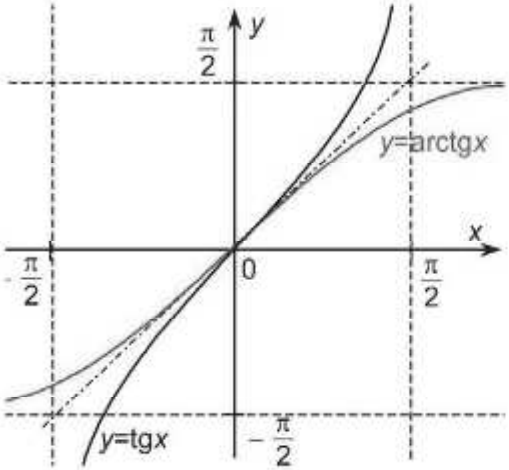
7) Функция нечетная: $\mathrm{ctg}(-x)=-\mathrm{ctg}x$

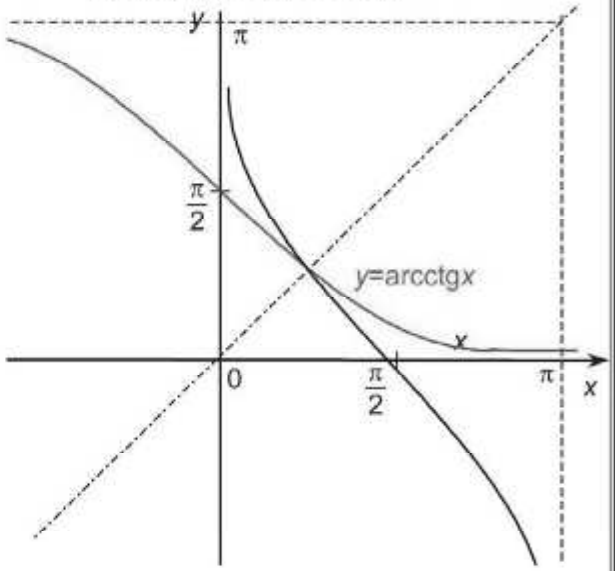


Обратные тригонометрические функции

$y=\arcsin x$	$y=\arccos x$
1) О.О.Ф. $x\in[-1;1]$	1) О.О.Ф. $x\in[-1;\ 1]$
2) О.З.Ф. $y\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$	2) О.З.Ф. $y\in[0;\ \pi\downarrow]$
3) Нули функции $x=0$	3) Нули функции $x=1$
4) Знакопостоянство:	4) Знакопостоянство:
$y>0$, если $x\in(0;\ 1]$	$y>0$, если $x\in[-1;\ 1)$
$y<0$, если $x\in[-1;\ 0)$	5) Монотонность:
5) Монотонность:	$y\downarrow$, если $x\in[-1;1]$, $k\in Z$
$y\uparrow$, если $x\in[-1;\ 1]$, $k\in Z$	6) Функция непериодическая
6) Функция непериодическая	7) Функция общего вида
7) Функция нечетная: $\arcsin(-x)=-\arcsin x$	
	

$y=\mathrm{arctg}\,x$	$y=\mathrm{arcctg}\,x$
1) О.О.Ф. $x\in R$ 2) О.З.Ф. $y\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ 3) Нули функции: $x=0$ 4) Знакопостоянство: $y>0$, если $x\in(0;+\infty)$ $y<0$, если $x\in(-\infty;0)$ 5) Монотонность: $y\uparrow$, если $x\in R$ 6) Функция непериодическая 7) Функция нечетная $\mathrm{arctg}(-x)=-\mathrm{arctg}\,x$	1) О.О.Ф. $x\in R$ 2) О.З.Ф $y\in(0;\pi)$ 3) Нули функции: нет 4) Знакопостоянство: $y>0$, если $x\in R$ 5) Монотонность: $y\downarrow$, если $x\in R$ 6) Функция непериодическая 7) Функция общего вида

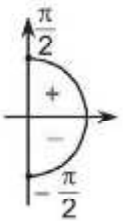




1. Арксинусом числа $a \in [-1;1]$ называется такое число $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен a.

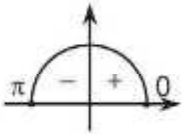
$\arcsin a = \alpha$: $\sin\alpha = a$, где $a \in [-1;1]$; $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

$\arcsin(-a) = -\arcsin a$



2. Арккосинусом числа $a \in [-1; 1]$ называется такое число $\alpha \in [0; \pi]$, косинус которого равен a.
$\arccos a = \alpha$: $\cos\alpha = a$, где $a \in [-1;1]$; $\alpha \in [0; \pi]$.

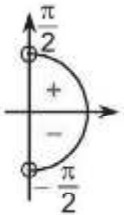
$\arccos(-\alpha) = \pi - \arccos a$



3. Арктангенсом числа $a \in R$ называется такое число $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен a.

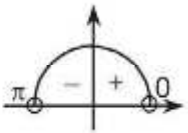
$\mathrm{arctg}\, a = \alpha$: $\mathrm{tg}\,\alpha = a$, где a – любое, $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

$\mathrm{arctg}(-a) = -\mathrm{arctg}\, a$



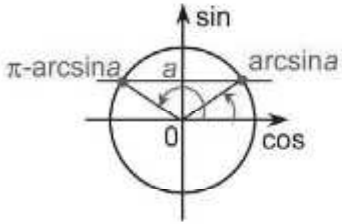
4. Арккотангенсом числа $a \in R$ называется такое число $\alpha \in (0; \pi)$, котангенс которого равен a.
$\mathrm{arcctg}\, a = \alpha$: $\mathrm{ctg}\,\alpha = a$, где a – любое, $\alpha \in (0; \pi)$.

$\mathrm{arcctg}(-a) = \pi - \mathrm{arcctg}\, a$

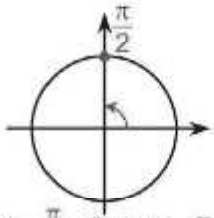


Тригонометрические уравнения

1. $\sin x = a$, $|a| \le 1$; $\left[\begin{array}{l} x = \arcsin\alpha + 2\pi k, k \in Z \\ x = \pi - \arcsin\alpha + 2\pi k, k \in Z \end{array}\right.$ или $x = (-1)^k \cdot \arcsin a + \pi k$, $k \in Z$.



$\sin x = 1$

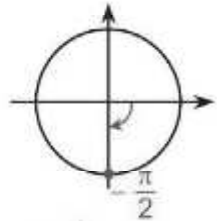


$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$

$\sin x = 0$

$x = \pi n, n \in Z$

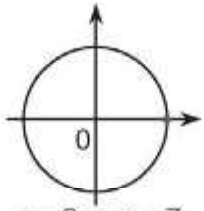
$\sin x = -1$



$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$

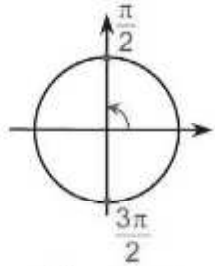
2. $\cos x = a$, $|a| \le 1$; $\left[\begin{array}{l} x = \arccos a + 2\pi k, k \in Z \\ x = -\arccos a + 2\pi k, k \in Z \end{array}\right.$; $x = \pm\arccos a + 2\pi k$, $k \in Z$

$\cos x = 1$



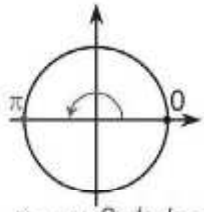
$x = 2\pi n, n \in Z$

$\cos x - 0$



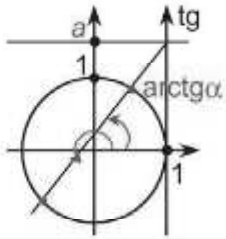
$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$

$\cos x = -1$



$x = \pi + 2\pi k, k \in Z$

3. $\mathrm{tg}x=a$, a – любое; $x=\mathrm{arctg}a+\pi k$, $k\in Z$



4. $a\cdot\sin x+b\cdot\cos x=c \quad |:\sqrt{a^2+b^2}$

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\sin x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\cos x=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\sin(x+\varphi)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}, \text{ где } \varphi=\arccos\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Пример

$$\sqrt{3}\sin 3x-\cos 2x=\sqrt{2} \quad |:\sqrt{3+1};\ \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}\cos 2x=\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\cos\frac{\pi}{6}\cdot\sin 2x-\sin\frac{\pi}{6}\cdot\cos 2x=\frac{\sqrt{2}}{2};\ \sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2};$$

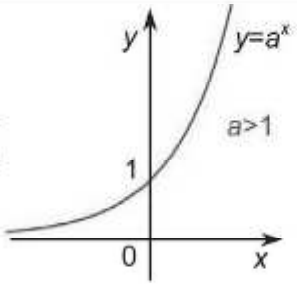
$$2x-\frac{\pi}{6}=(-1)^k\cdot\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}+\pi k,\ k\in Z;\ 2x=(-1)^k\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in Z;$$

$$x=(-1)^k\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2},\ k\in Z.$$

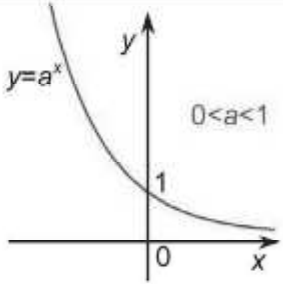
Показательная функция

Функция вида $y=a^x$, где $a>0$, $a\neq1$ – число, x – независимая переменная называется показательной функцией.

$y=a^x$, $a>1$
1) О.О.Ф. $x\in R$
2) О.З.Ф. $y\in(0;+\infty)$
3) нули функции: нет
4) знакопостоянство: $y>0$ при $x\in R$
5) монотонность: $y\uparrow$ при $x\in R$



$y=a^x$, $0<a<1$
1) О.О.Ф. $x\in R$
2) О.З.Ф. $y\in(0;+\infty)$
3) нули функции: нет
4) знакопостоянство: $y>0$ при $x\in R$
5) монотонность: $y\downarrow$ при $x\in R$



Показательные уравнения сводятся к решению уравнения $a^x=b$,
где $a>0$, $a\neq1$, x – неизвестное.
если $b>0$, то уравнение имеет один корень,
если $b\leq0$, то уравнение корней не имеет.

Показательные неравенства сводятся к решению неравенств вида:
$a^x>a^b$ или $a^x<a^b$, где $a>0$, $a\neq1$.

Неравенства решаются с помощью свойств возрастания и убывания показательной функции.

если $a>1$, то $\begin{matrix} a^x>a^b \\ x>b \end{matrix}$ или $\begin{matrix} a^x<a^b \\ x<b \end{matrix}$

если $0<a<1$, то $\begin{matrix} a^x>a^b \\ x<b \end{matrix}$ или $\begin{matrix} a^x<a^b \\ x>b \end{matrix}$

Логарифмы

Логарифмом положительного b по основанию a, где $a>0$, $a\neq1$, называется показатель степени, в которую нужно возвести число a чтобы получить b.

$\log_a b=x : a^x=b,\ a>0,\ a\neq1,\ b>0$

Основное логарифмическое тождество: $a^{\log_a b}=b$, $b>0$, $a>0$, $a\neq1$.

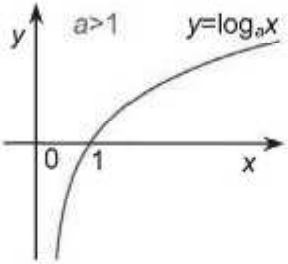
Свойства логарифмов	Примеры
1. $\log_a a=1$; $\log_a 1=0$	$\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{3}=1$; $\log_{76}1=0$
2. $\log_a b+\log_a c=\log_a(bc)$	$\log_{10}5+\log_{10}2=\log_{10}10=1$
3. $\log_a b-\log_a c=\log_a\frac{b}{c}$	$\log_5 75-\log_5 3=\log_5 25=2$
4. $\log_a b^n=n\cdot\log_a b$	$\log_3 81=\log_3 3^4=4\log_3 3=4\cdot1=4$
5. $\log_{a^n} b=\frac{1}{n}\cdot\log_a b$	$\log_{\sqrt{2}} 2=2\log_2 2=2\cdot1=2$
6. $\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$	$\log_5 7=\frac{1}{\log_7 5}$
7. $\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$	$\frac{\log_3 125}{\log_3 5}=\log_5 125=3$

Логарифмическая функция

Функция вида $y=\log_a x$, где $a>0$, $a\neq1$ – число, x — независимая переменная называется логарифмической функцией.

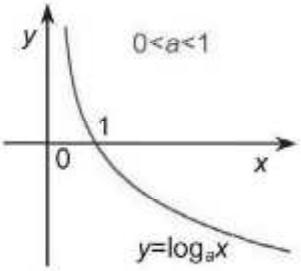
$y=\log_a x$

1) О.О.Ф. $x\in(0;+\infty)$
2) О.З.Ф. $y\in R$
3) нули функции: $x=1$
4) знакопостоянство:
$y>0$, если $x\in(1;+\infty)$
$y<0$, если $x\in(0;1)$
5) монотонность:
$y\uparrow$, если $x\in(0;+\infty)$



$y=\log_a x$

1) О.О.Ф. $x\in(0;+\infty)$
2) О.З.Ф. $y\in R$
3) нули функции: $x=1$
4) знакопостоянство:
$y>0$, если $x\in(0;1)$
$y<0$, если $x\in(1;+\infty)$
5) монотонность:
$y\downarrow$, если $x\in(0;+\infty)$



Логарифмические уравнения сводятся к решению уравнения вида $\log_a f(x)=\log_a g(x)$, где $a>0$, $a\neq1$.

$$\begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)>0 \\ f(x)=g(x) \end{cases}$$

Логарифмические неравенства сводятся к решению неравенств вида $\log_a f(x)>\log_a g(x)$, или $\log_a f(x)\leq\log_a g(x)$

если $a>1$, то $\begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)>0 \\ f(x)>g(x) \end{cases}$ или $\begin{cases} f(x)<0 \\ g(x)<0 \\ f(x)\leq g(x) \end{cases}$

если $0<a<1$, то $\begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)>0 \\ f(x)<g(x) \end{cases}$ или $\begin{cases} f(x)<0 \\ g(x)<0 \\ f(x)\geq g(x) \end{cases}$

Производная

Пусть функция $y=f(x)$ определена на некотором промежутке, x – точка этого промежутка и число $h\neq0$, такое, что $x+h$ также принадлежит этому промежутку. Тогда предел отношения приращения функции Δy к соответствующему приращению аргумента h, когда $h\to0$, называются **производной** функции $y=f(x)$ в точке x. Обозначается $f'(x)=\lim\limits_{h\to0}\frac{\Delta y}{h}$, где $\Delta y=f(x+h)-f(x)$.

Геометрический смысл производной состоит в том, что значение производной функции в точке равно угловому коэффициенту касательной к графику функции в данной точке.

$f'(x)=\operatorname{tg}\alpha$.

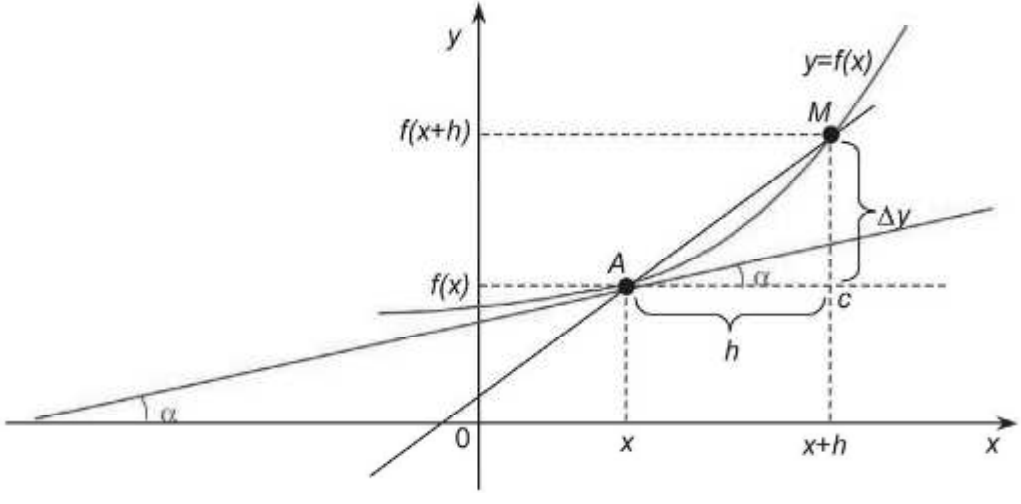


Таблица производных

Функция	Производная	Пример
c	0	$(5)'=0$; $\left(-\frac{2}{7}\right)'=0$
$ax+b$	a	$(3x-7)'=3$; $\left(1-\frac{2}{3}x\right)'=-\frac{2}{3}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	
x^n	$n\cdot x^{n-1}$	$(x^7)'=7x^6$; $\left(\sqrt[3]{x^2}\right)'=\left(x^{\frac{2}{3}}\right)'=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$
$(ax+b)^n$	$n\cdot a\cdot(ax+b)^{n-1}$	$((2x-5)^3)'=3\cdot 2(2x-5)^2=6(2x-5)^2$
e^x	e^x	
a^x	$a^x\cdot \ln a$	$(7^x)'=7^x\cdot \ln 7$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	
$\log_a x$	$\frac{1}{x\ln a}$	$(\log_3 x)'=\frac{1}{x\ln 3}$
$\sin x$	$\cos x$	
$\cos x$	$-\sin x$	
$\mathrm{tg}\,x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	
$\mathrm{ctg}\,x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	

Правила дифференцирования

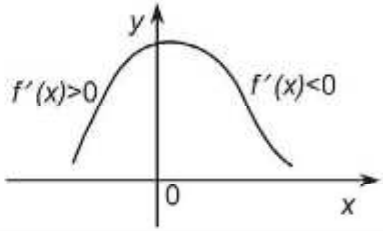
$(u+v)'=u'+v'$	$(5x^3-x^8)'=15x^2-8x^7$
$(u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v'$	$(x^2\cdot\cos x)'=(x^2)'\cdot\cos x+x^2\cdot(\cos x)'=2x\cos x-x^2\sin x$
$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$	$\left(\frac{\sqrt{x}}{\sin x}\right)'=\frac{(\sqrt{x})'\cdot\sin x-\sqrt{x}\cdot(\sin x)'}{\sin^2 x}=$ $=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin x-\sqrt{x}\cdot\cos x}{\sin^2 x}=\frac{\sin x-2x\cos x}{2\sqrt{x}\cdot\sin^2 x}$
$(u(v))'=u'(v)\cdot v'$	$(6^{\mathrm{tg}x})'=6^{\mathrm{tg}x}\cdot\ln 6\cdot(\mathrm{tg}x)'=\frac{6^{\mathrm{tg}x}\ln 6}{\cos^2 x}$

Уравнение касательной

$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$, где x_0 – точка касания

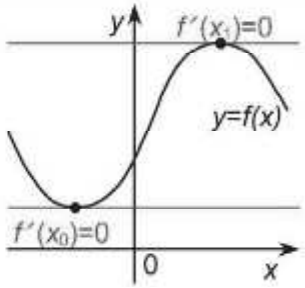
Применение производной к исследованию функции

1. Если $f'(x)>0$ на промежутке,
то функция $f(x)$ возрастает на этом промежутке;
если $f'(x)<0$ на промежутке,
то функция $f(x)$ убывает на этом промежутке.



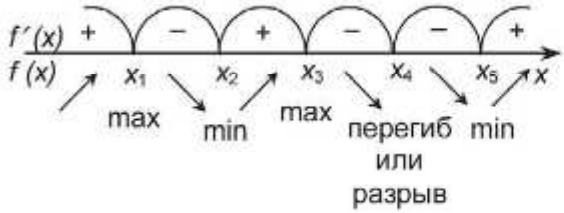
2. x_0 называется **точкой максимума** функции $f(x)$,
если существует такая окрестность точки x_0,
что для всех x этой окрестности выполняется неравенство $f(x) \le f(x_0)$.

x_0 называется **точкой минимума** функции $f(x)$,
если существует такая окрестность точки x_0,
что для всех x этой окрестности выполняется неравенство $f(x) \ge f(x_0)$.



Точки минимума и максимума называются **точками экстремума**.

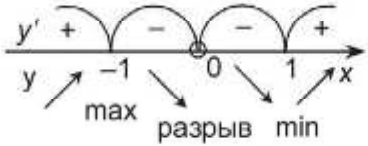
Точки, в которых производная равна нулю, называются **стационарными**.

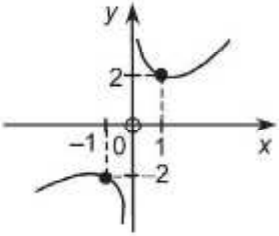


где x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 – стационарные точки.

Пример: $y = x + \frac{1}{x}$, $x \ne 0$. Нули функции: $x + \frac{1}{x} = 0$, нет корней.

$y' = 1 - \frac{1}{x^2}$ $\qquad$ $y' = 0$, $x^2 - 1 = 0$, $x_{1,2} = \pm 1$





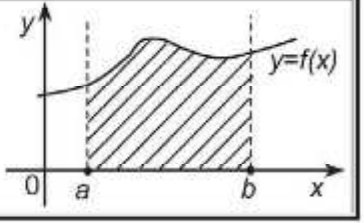
Первообразная

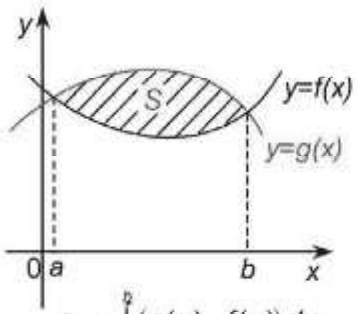
Функция $c(x)$ называется **первообразной функции $f(x)$** на некотором промежутке, если для всех x из этого промежутка $c'(x)=f(x)$.

Функция	Первообразная	Пример
$x^p,\ p \neq -1$	$\frac{x^{p+1}}{p+1}+C$	$f(x)=x^9 \Rightarrow F(x)=\frac{x^{10}}{10}+C$ $f(x)=x^{\frac{1}{3}} \Rightarrow F(x)=\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}+C$
$\frac{1}{x}$	$\ln x+C$	$f(x)=\frac{4}{x} \Rightarrow F(x)=4\ln x+C$
$\frac{1}{kx+b},\ k\neq 0$	$\frac{1}{k}\ln\lvert kx+b\rvert+C$	$f(x)=\frac{1}{7x+3} \Rightarrow F(x)=\frac{1}{7}\ln\lvert 7x+3\rvert+C$
e^x	e^x+C	
$e^{kx+b},\ k\neq 0$	$\frac{1}{k}e^{kx+b}+C$	$f(x)=e^{-x+2} \Rightarrow F(x)=-e^{-x+2}+C$
$\sin(kx+b),\ k\neq 0$	$-\frac{1}{k}\cos(kx+b)+C$	$f(x)=\sin(3x-1) \Rightarrow f(x)=-\frac{1}{3}\cos(3x-1)+C$
$\cos(kx+b),\ k\neq 0$	$\frac{1}{k}\sin(kx+b)+C$	$f(x)=\cos(2-7x) \Rightarrow f(x)=-\frac{1}{7}\sin(2-7x)+C$

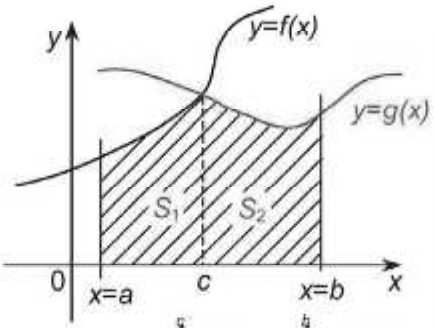
Площадь криволинейной трапеции

Фигура, ограниченная снизу отрезком $[a;b]$ оси I X, сверху графиком непрерывной функции $y=f(x)$, принимающей положительное значение, а с боков отрезками прямых $x=a$, $x=b$, называется **криволнейной трапецией**. $S=\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$

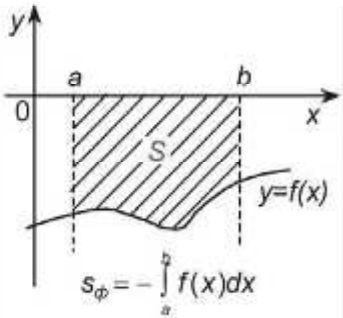




$$s_ф = \int_a^b (g(x) - f(x))\,dx$$



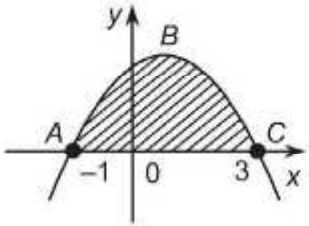
$$s_ф = s_1 + s_2 = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b g(x)dx$$



$$s_ф = -\int_a^b f(x)dx$$

Пример

Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y=-x^2+2x+3$ и осью абсцисс.



$$S_{ABC} = \int_{-1}^{3}(-x^2+2x+3)dx =$$

$$= -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x\Big|_{-1}^{3} =$$

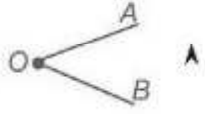
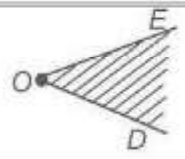
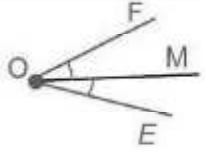
$$= \left(-\frac{1}{3}\cdot 27 + 9 + 9\right) - \left(-\frac{1}{3}\cdot(-1) + 1 - 3\right) =$$

$$= 9 - \frac{1}{3} + 2 = 10\frac{2}{3}\ (\text{ед}^2)$$

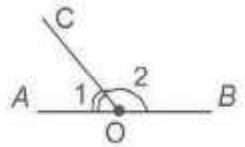
Геометрия

В переводе с греческого означает «землемерие». Основные элементы: точка, прямая, плоскость.

Аксиома – утверждение, которое не требует доказательств.
Теорема – утверждение, истинность которого устанавливается путем доказательства.

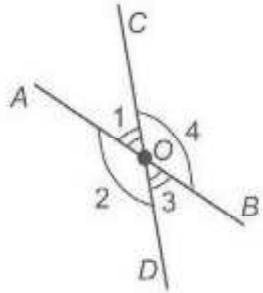
	**Отрезок** – часть прямой, ограниченная двумя точками. Обозначается: *AB* или *BA*.
	**Луч** – часть прямой, ограниченная с одной стороны. Обозначается *CD* или *a*.
	**Угол** – геометрическая фигура, состоящая из двух различных лучей, выходящих из одной точки, которая называется вершиной угла, а лучи – сторонами угла. Обозначается $\angle AOB$ или $\angle BOA$.
	**Плоский угол** – часть плоскости, ограниченная двумя лучами, выходящими из одной точки. Обозначается $\angle EOD$ или $\angle DOE$.
	**Середина отрезка** – точка, делящая отрезок пополам. Обозначается $E \in AB$, $AE=EB$.
	**Биссектриса угла** – луч, исходящий из вершины угла и делящий его на два равных угла. OM – биссектриса, $\angle FOM=\angle EOM$

Смежные углы и их свойство

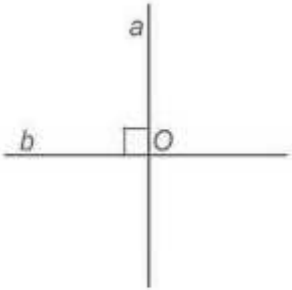


Два угла, у которых одна сторона общая, а две другие являются продолжениями одна другой, называются **смежными углами**.
Смежные углы в сумме составляют 180°.
$\angle 1+\angle 2=180°$

Вертикальные углы и их свойство

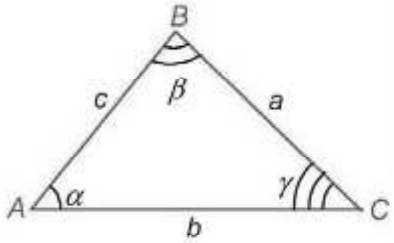


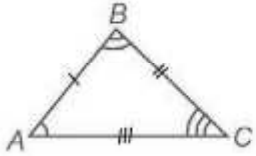
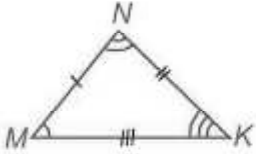
Два угла называются **вертикальными**, если стороны одного угла являются продолжениями сторон другого.
Вертикальные углы равны $\angle 1=\angle 3$, $\angle 2=\angle 4$.



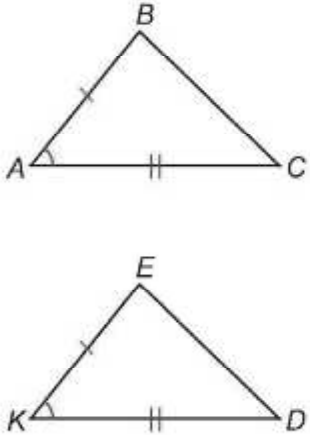
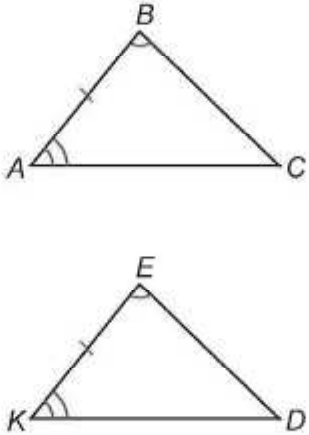
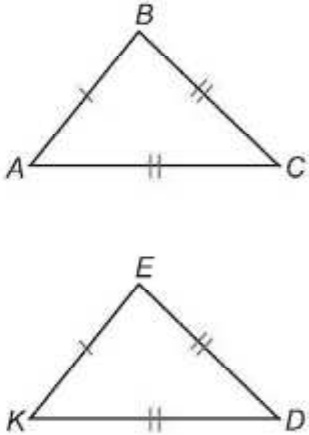
Перпендикулярные прямые – две пересекающиеся прямые, образующие при пересечении прямые углы.
Обозначение $a \perp b$.

Треугольники

	**Треугольник** – геометрическая фигура, образованная тремя точками, не лежащими на одной прямой, и тремя попарно соединенными отрезками.
	Точки называются **вершинами** треугольника.
	Отрезки называются **сторонами** треугольника.
	Углы, образованные отрезками, выходящими из вершин треугольниками, называются **углами** треугольника.
	Обозначение: ΔABC или ΔBCA или ΔCAB.

	Два треугольника называются **равными**, если три стороны и три угла одного треугольника соответственно равны трем стронам и трем углам другого треугольника.
	Если $AB=MN$; $BC=NK$; $AC=MK$; $\angle A=\angle M$; $\angle B=\angle N$; $\angle C=\angle K$, то $\Delta ABC=\Delta MNK$.

Признаки равенства треугольников

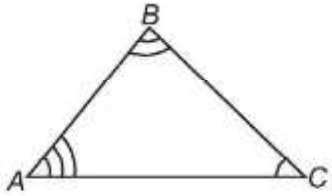
I признак (по двум сторонам и углу между ними)	**II признак** (по стороне и двум прилегающим углам)	**III признак** (по трем сторонам)
Если $AB=KE$, $AC=KD$, $\angle A=\angle K$, то $\Delta ABC=\Delta KED$	Если $AB=KE$, $\angle A=\angle K$, $\angle B=\angle E$, то $\Delta ABC=\Delta KED$	Если $AB=KE$, $AC=KD$, $BC=ED$, то $\Delta ABC=\Delta KED$
		

Значит, для того чтобы утверждать, что два треугольника равны, достаточно знать равенство трех пар соответствующих элементов.

Типы треугольников

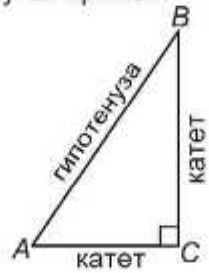
По углам

Треугольник называется **остроугольным**, если все углы острые.



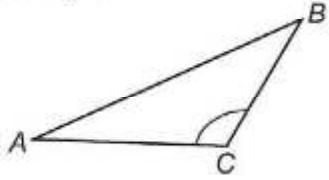
$\angle A<90°$, $\angle B<90°$, $\angle C<90°$

Треугольник называется **прямоугольным**, если один угол прямой.



$\angle C=90°$

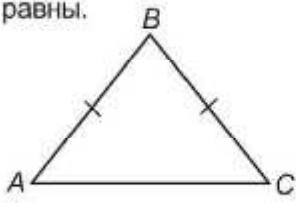
Треугольник называется **тупоугольным**, если один угол тупой.



$90°<\angle C<180°$

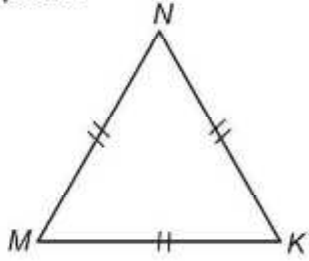
По сторонам

Треугольник называется **равнобедренным**, если две стороны равны.

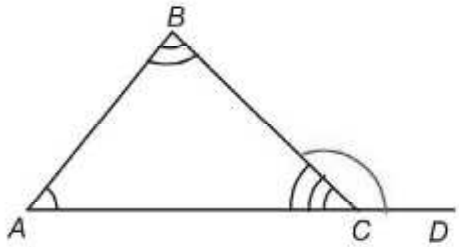


$AB=BC$ – равные стороны, называются боковыми сторонами; AC – называется основанием треугольника.

Треугольник называется **равносторонним**, если все стороны равны.

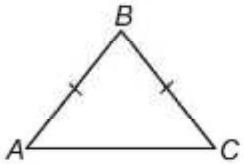
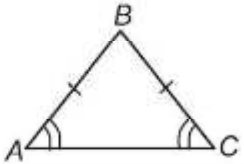


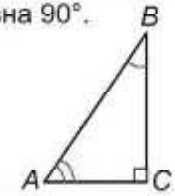
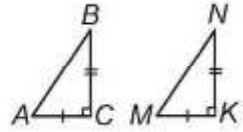
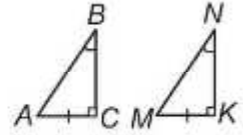
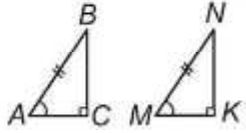
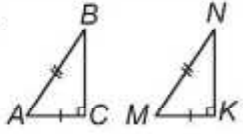
$MN=NK=MK$.



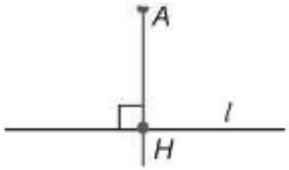
- Сумма углов любого треугольника равна 180°.
$\angle A+\angle B+\angle C=180°$
- Внешний угол треугольника – угол, смежный с каким–нибудь углом данного треугольника.
$\angle BCD$ – внешний угол ΔABC при вершине C.
- Внешний угол треугольника равен сумме двух углов треугольника, не смежных с ним.
$\angle BCD=\angle A+\angle B$
- В треугольнике против большей стороны лежит больший угол, и обратно, против большего угла лежит большая сторона.
- Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон.

$AB<AC+BC$; $BC<AB+AC$; $AC<AB+BC$ – неравенство треугольника

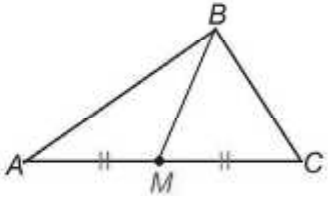
Свойство равнобедренного треугольника	Признак равнобедренного треугольника
В равнобедренном треугольнике углы при основании равны. Если $AB=BC$, то $\angle A=\angle C$	Если два угла треугольника равны, то треугольник равнобедренный. Если $\angle A=\angle C$, то $AB=BC$.
	

Свойства прямоугольного треугольника	Признаки прямоугольного треугольника
1. Сумма острых углов равна 90°. $\angle A+\angle C=90°$ 	**1.** По двум катетам: Если $AC=MK$, $BC=NK$, то $\Delta ABC=\Delta MNK$. 
2. Катет, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы. Если $\angle A=30°$, то $BC=\frac{1}{2}AB$. Если $\angle B=30°$, то $AC=\frac{1}{2}AB$.	**2.** По катету и острому углу: Если $AC=MK$, $\angle B=\angle N$, то $\Delta ABC=\Delta MNK$. 
3. Если катет равен половине гипотенузы, то угол, лежащий против этого катета, равен 30°. Если $AC=\frac{1}{2}AB$, то $\angle B=30°$. Если $BC=\frac{1}{2}AB$, то $\angle A=30°$.	**3.** По гипотенузе и острому углу: Если $AB=MN$, $\angle A=\angle M$, то $\Delta ABC=\Delta MNK$. 
	4. По катету и гипотенузе: Если $AC=MK$, $AB=MN$, то $\Delta ABC=\Delta MNK$. 
Значит, для того чтобы утверждать, что два прямоугольных треугольника равны, достаточно знать равенство двух пар соответствующих элементов.	

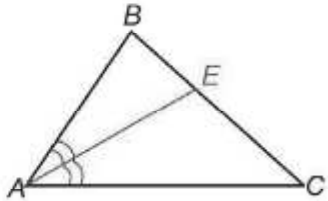
Перпендикуляр – отрезок, проведенный из точки к прямой под прямым углом.
AM – перпендикуляр к прямой *l*, $AH \perp l$



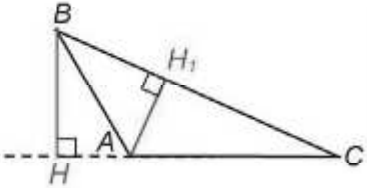
Медиана треугольника – отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны треугольника.
BM – медиана, *AM*=*MC*



Биссектриса угла треугольника – отрезок биссектрисы угла, соединяющий вершину треугольника с точкой противоположной стороны треугольника.
AE – биссектриса, $\angle BAE = \angle CAE$

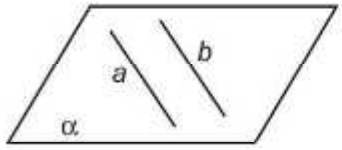


Высота треугольника – перпендикуляр, проведенный из вершины треугольника к прямой, содержащей противоположную сторону треугольника.
$BH \perp AC$, $AH_1 \perp BC$, *BH* и AH_1 – высоты.

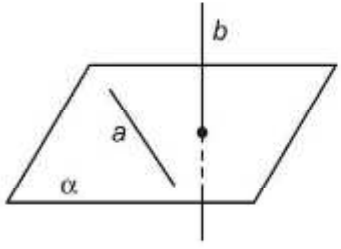
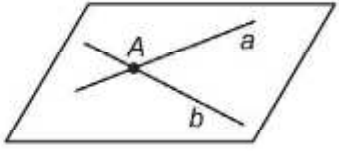


Параллельные прямые

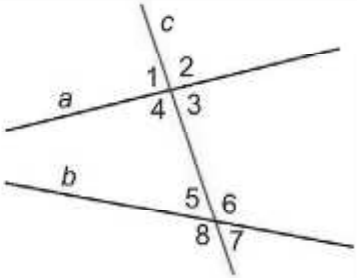
Две прямые на плоскости называются **параллельными**, если они не пересекаются.

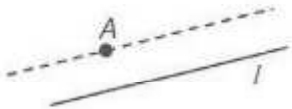


Если $a \in \alpha$, $b \in \alpha$, $a \not\cap b$, то $a \| b$.
то есть для того, чтобы утверждать, что прямые параллельны, необходимо чтобы оба условия выполнялись:
1) обе прямые лежали в одной плоскости
2) обе прямые не имели общих точек.

выполняется только 2-е условие:	выполнятеся только 1-е условие:
Если $a \in \alpha$, $b \notin \alpha$, $a \not\cap b$, то $a \nparallel b$ 	Если $a \in \alpha$, $b \in \alpha$, $d \cap b = A$, то $a \nparallel b$ 

При пересечении прямых a и b секущей c получим 8 углов:
$\angle 3$ и $\angle 5$; $\angle 4$ и $\angle 6$ – внутренние накрест лежащие углы;
$\angle 1$ и $\angle 7$; $\angle 2$ и $\angle 8$ – внешние накрест лежащие углы;
$\angle 4$ и $\angle 5$; $\angle 3$ и $\angle 6$ – внутренние односторонние углы;
$\angle 1$ и $\angle 8$; $\angle 2$ и $\angle 7$ – внешние односторонние углы;
$\angle 1$ и $\angle 5$; $\angle 4$ и $\angle 8$; $\angle 2$ и $\angle 6$; $\angle 3$ и $\angle 7$ – соответственные углы.

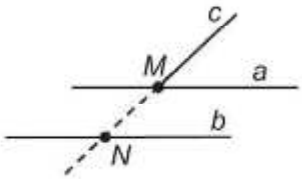




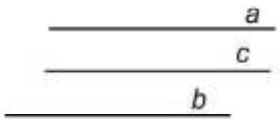
Аксиома параллельных прямых:
Через точку, не лежащую на данной прямой, проходит только одна прямая, параллельная данной.

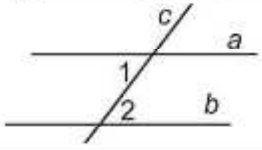
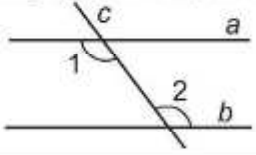
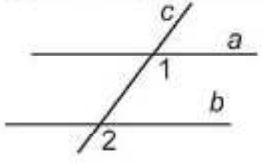
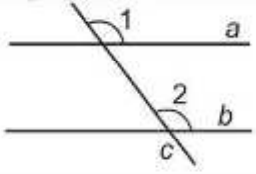
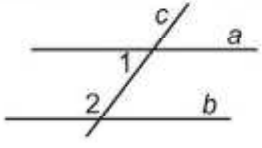
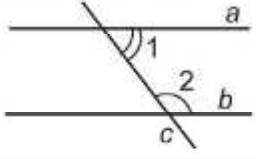
Следствие:

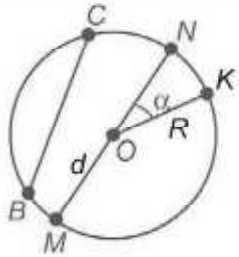
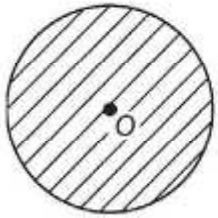
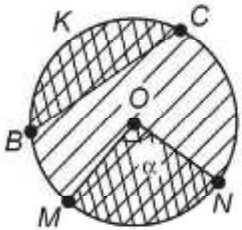
1. Если прямая пересекает одну из двух параллельных прямых, то она пересекает и другую прямую.
Если $a \| b$, $a \cap c = M$, то $b \cap c = N$



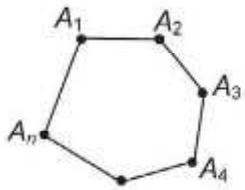
2. Если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны друг другу.
Если $a \| c$ и $b \| c$, то $a \| b$.



Свойства параллельных прямых	Признаки параллельных прямых
1. Если две параллельные прямые пересечены секущей, то накрест лежащие углы равны. Если $a \parallel b$, c – секущая, то $\angle 1 = \angle 2$  	**1.** Если при пересечении двух прямых секущей накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны. Если c – секущая, $\angle 1 = \angle 2$, то $a \parallel b$. 
2. Если две параллельные прямые пересечены секущей, то соответственные углы равны. Если $a \parallel b$, c – секущая, то $\angle 1 = \angle 2$.  	**2.** Если при пересечении двух прямых секущей соответственные углы равны, то прямые параллельны. Если c – секущая, $\angle 1 = \angle 2$, то $a \parallel b$. 
3. Если две параллельные прямые пересечены секущей, то сумма односторонних углов равна 180°. Если $a \parallel b$, c – секущая, то $\angle 1 + \angle 2 = 180°$.  	**3.** Если при пересечении двух прямых секущей сумма односторонних углов равна 180°, то прямые параллельны. Если c – секущая, $\angle 1 + \angle 2 = 180°$, то $a \parallel b$. 

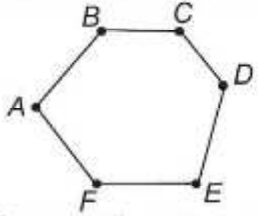
	**Окружность** – геометрическая фигура, состоящая из всех точек плоскости, равноудаленных от данной точки, которая называется центром окружности. **Радиус** – отрезок, соединяющий центр окружности с любой точкой окружности; обозначается R или r. **Хорда** – отрезок, соединяющий две точки окружности. **Диаметр** – хорда, проходящая через центр окружности; обозначается d, $d=2r$. (Длина окружности $C=2\pi R$). **Дуга** – часть окружности, ограниченная двумя точками. ($\cup NK = \frac{\pi R \cdot \alpha}{180°}$).
	**Круг** – часть плоскости, ограниченная окружностью. Радиус, хорда, диаметр круга определяются так же, как и у окружности. (Площадь круга $S=\pi R^2$.)
	**Сегмент** (BCK) – часть круга, отсекаемая хордой BC. **Сектор** (MON) – часть круга, вырезаемая двумя радиусами OM и ON. (Площадь сектора $S_{MON} = \frac{\pi R^2 \cdot \alpha}{360°}$)

Многоугольники

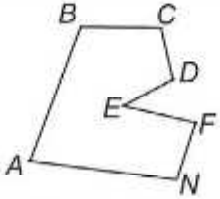


Простая замкнутая ломаная называется **многоугольником**.
Звенья ломаной – **стороны многоугольника**.
Концы звеньев – **вершины многоугольника**.
$A_1A_2A_3...A_n$ – n–угольник, A_1, A_2, A_3,...,A_n – вершины,
A_1A_2, A_2A_3,...A_nA_1 – стороны.
Отрезки, соединяющие несоседние вершины, называеются **диагоналями** многоугольника.

* Многоугольник называется **выпуклым**, если он лежит по одну сторону от каждой прямой, проходящей через две его соседние вершины.
* **Плоским** многоугольником называется многоугольник с его внутренней областью.



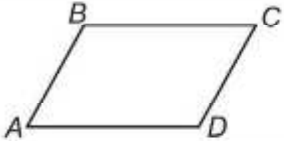
Выпуклый многоугольник



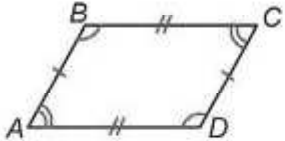
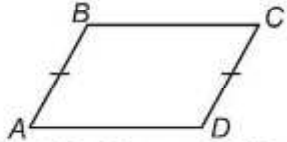
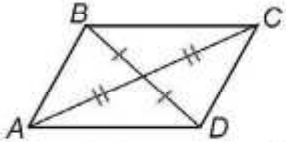
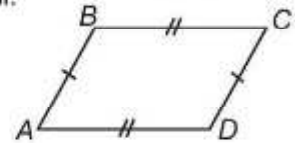
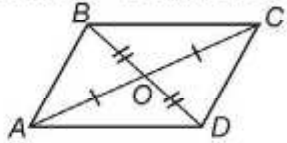
Не является выпуклым многоугольником

Плоский многоугольник

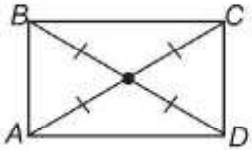
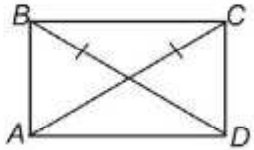
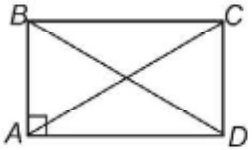
Сумма углов выпуклого n–угольника равна $180°\cdot(n-2)$.
Сумма внешних углов n–угольника, взятых по одному при каждой вершине, равна 360°.

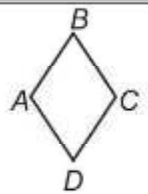


Параллелограмм – четырехугольник, стороны которого попарно параллельны.
Если $AB||CD$, $BC||AD$, то $ABCD$ – параллелограмм.

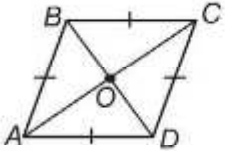
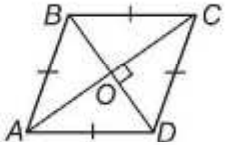
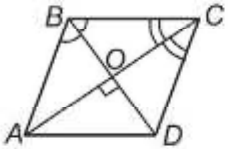
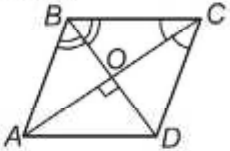
Свойства параллелограмма	Признаки параллелограмма
1. В параллелограмме противоположные стороны и противоположные углы равны.  Если $ABCD$ – параллелограмм, то $AB=CD$, $BC=AD$, $\angle A=\angle C$, $\angle B=\angle D$.	**1.** Если в четырехугольнике две стороны равны и параллельны, то этот четырехугольник – параллелограмм.  Если $AB \parallel CD$, $AB=CD$, то $ABCD$ – параллелограмм.
2. Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.  Если $ABCD$ – параллелограмм, $AC \cap BD=O$, то $AO=OC$, $BO=OD$.	**2.** Если в четырехугольнике стороны попарно равны, то этот четырехугольник – параллелограмм.  Если $AB=CD$, $BC=AD$, то $ABCD$ – параллелограмм.
	3. Если в четырехугольнике диагонали в точке пересечения делятся пополам, то этот четырехугольник – параллелограмм.  Если $AB \cap CD=O$, $AO=OC$, $BO=OD$, то $ABCD$– параллелограмм.

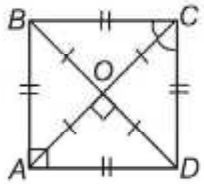
Прямоугольник – параллелограмм, у которого все углы прямые.
Если $AB \| CD$, $BC \| AD$, $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$, $ABCD$ – прямоугольник.

Свойства прямоугольника	Признак прямоугольника
1. Прямоугольник обладает всеми свойствами параллелограмма, то есть противоположные стороны равны, диагонали в точке пересечения делятся пополам.  Если $ABCD$ – прямоугольник, то $AB=CD$; $BC=AD$; $AO=OC$; $BO=OD$.	Если в параллелограмме диагонали равны, то этот параллелограмм – прямоугольник.  Если $ABCD$ – параллелограмм, $AC=BD$, то $ABCD$ – прямоугольник.
2. Диагонали прямоугольника равны.  Если $ABCD$ – прямоугольник, то $AC=BD$.	

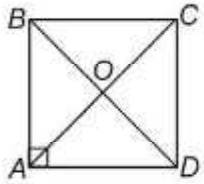


Ромб – параллелограмм, у которого все стороны равны.
Если $AB \| CD$, $BC \| AD$, $AB=BC=CD=AD$ то $ABCD$ – ромб.

Свойства ромба	Признаки ромба
1. Ром обладает всеми свойствами параллелограмма, то есть противоположные углы равны, диагонали в точке пересечения делятся пополам.  Если $ABCD$ – ромб, то $\angle A=\angle C$, $\angle B=\angle D$, $AO=OC$, $BO=OD$.	**1.** Если в параллелограмме диагонали взаимно перепендикулярны, то этот параллелограмм – ромб.  Если $ABCD$ – параллелограмм, $AC \perp BD$, то $ABCD$ – ромб.
2. Диагонали ромба взаимно перпендикулярны и делят его углы пополам.  Если $ABCD$ – ромб, то $AC \perp BD$, $\angle BCA=\angle DCA$, $\angle ABD=\angle CBD$.	**2.** Если в параллелограмме диагонали являются биссектрисами углов, то этот параллелограмм – ромб.  Если $ABCD$ – параллелограмм, $\angle BCA=\angle DCA$, $\angle ABD=\angle CBD$, то $ABCD$ – ромб.

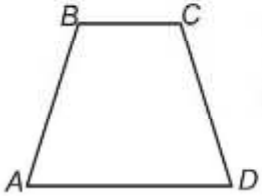


Квадрат – прямоугольник, у которого все стороны равны. Или: квадрат – ромб, у которого все углы – прямые.
Если $AB \| CD$, $BC \| AD$, $AB=BC$, $\angle A=90°$ то $ABCD$ – квадрат.

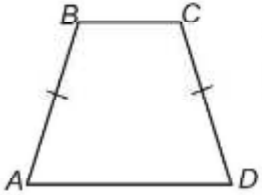


Квадрат обладает всеми свойствами прямоугольника и ромба:

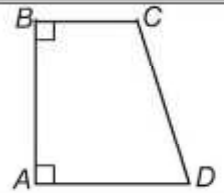
1. $AB=BC=CD=AD$
2. $\angle A=\angle B=\angle C=\angle D=90°$
3. $AC=BD$
4. $AC \perp BD$, $\angle BCA=\angle DCA$, $\angle ABD=\angle CBD$
5. $BO=OD=AO=OC$



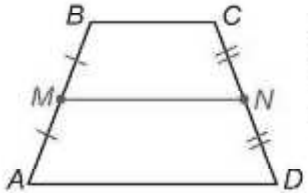
Трапеция – четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие стороны не параллельны.
Если $BC \| AD$; $AB \nparallel CD$, то $ABCD$ – трапеция.



Трапеция называется **равнобедренной**, если боковые стороны равны.
$AB=CD$.



Трапеция называется **прямоугольной**, если боковая сторона перпендикулярна основаниям.



Средняя линия трапеции – отрезок, соединяющий середины боковых сторон. *MN* – средняя линия трапеции *ABCD*.
Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна полусумме оснований.

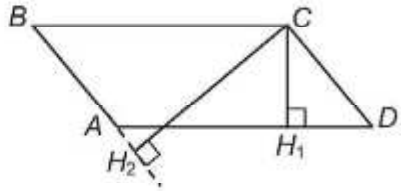
$MN \| AD \| BC$ и $MN = \frac{1}{2}(AD + BC)$.

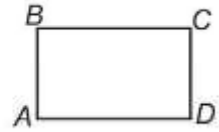
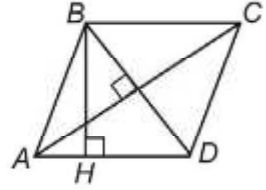
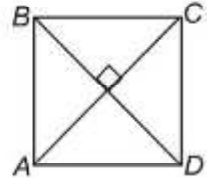
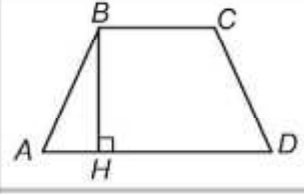
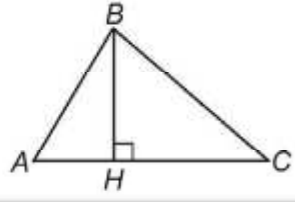
Площади многоугольников

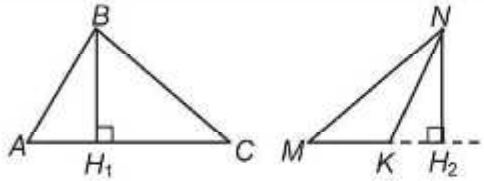
Площадь – положительное число

1. Единица измерения площади – квадрат, сторона которого равна единице измерения отрезков.
2. Площади равных фигур равны.
3. Площадь фигуры, составленной из нескольких частей, равна сумме площадей этих частей.

1) **Параллелограмм:** $S=AD \cdot CH_1$ или $S=AB \cdot CH_2$.
Площадь параллелограмма равна произведению основания на высоту.

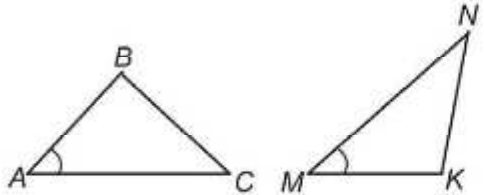


2) **Прямоугольник:** $S=AB\cdot BC$. Площадь прямоугольника равна произведению его смежных сторон.	
3) **Ромб:** $S=AD\cdot BH$ (как параллелограмм), $S=\frac{1}{2}AC\cdot BD$. Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей.	
4) **Квадрат:** $S=AB^2$ (как прямоугольник), $S=\frac{1}{2}AC^2$ (как ромб).	
5) **Трапеция:** $S=\frac{1}{2}(BC+AD)\cdot BH$. Площадь трапеции равна произведению полусуммы ее оснований на высоту.	
6) **Треугольник:** $S=\frac{1}{2}AC\cdot BH$. Площадь треугольника равна половине произведения основания на высоту.	



• Если высоты двух треугольников равны, то их площади относятся как основания.

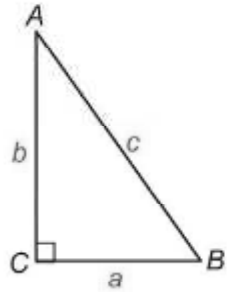
Если $BH_1=NH_2$, то $\frac{S_{ABC}}{S_{MNK}}=\frac{AC}{MK}$



• Если угол одного треугольника равен углу другого треугольника, то площади этих треугольников относятся как произведения сторон, заключающих равные углы.

Если $\angle A=\angle M$, то $\frac{S_{ABC}}{S_{MNK}}=\frac{AB\cdot AC}{MN\cdot MK}$

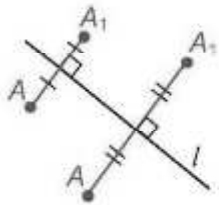
Теорема Пифагора



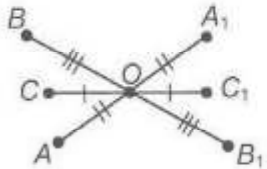
Квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов $c^2=a^2+b^2$.
Обратно: если квадрат одной стороны равен сумме квадратов двух других сторон, то треугольник прямоугольный.

Симметрия

Осевая симметрия



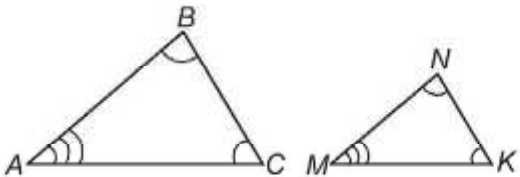
Точки A и A_1 называются симметричными относительно прямой l, если эта прямая l проходит через середину отрезка AA_1 и перпендикулярна ему. Каждая точка прямой l считается симметричной самой себе.



Центральная симметрия

Точки B и B_1 называются симметричными относительно точки O, если O – середина отрезка BB_1. Точка O считается симметричной самой себе.

Подобные треугольники



Два треугольника называются **подобными**, если их углы соответственно равны и стороны одного треугольника пропорциональны сходственным сторонам другого.

Если $\angle A=\angle M$, $\angle B=\angle N$, $\angle C=\angle K$, $\frac{AB}{MN}=\frac{BC}{NK}=\frac{AC}{MK}$, то $\Delta ABC \backsim \Delta MNKK$

Признаки подобия треугольников

I признак (по двум углам)	II признак (по двум сторонам и углу между ними)	III признак (по трем сторонам)
Если $\angle A=\angle M$, $\angle B=\angle N$, то $\Delta ABC \sim \Delta MNK$.	Если $\angle A=\angle M$, $\frac{AB}{MN}=\frac{AC}{MK}$, то $\Delta ABC \sim \Delta MNK$.	Если $\frac{AB}{MN}=\frac{BC}{NK}=\frac{AC}{MK}$, то $\Delta ABC \sim \Delta MNK$.

Отрезок XY называется средним пропорциональным (или средним геометрическим) между отрезками AB и CD, если $XY=\sqrt{AB\cdot CD}$.

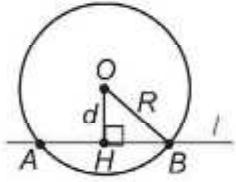
1) Высота прямоугольного треугольника, опущенная на гипотенузу, есть среднее пропорциональное между отрезками, на которые делится гипотенуза этой высотой. $CD=\sqrt{AD\cdot DB}$.

2) Катет прямоугольного треугольника есть среднее пропорциональное между гипотенузой и отрезком гипотенузы, заключенным между катетом и высотой, проведенной из вершины прямого угла. $AC=\sqrt{AB\cdot AD}$; $BC=\sqrt{AB\cdot DB}$.

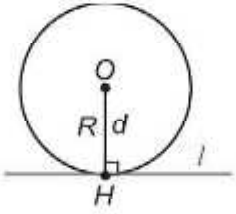
Касательная к окружности

Взаимное расположение прямой на плоскости

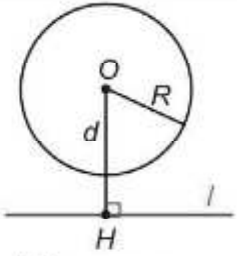
R – радиус окружности; *d* – расстояние от центра окружности до прямой.



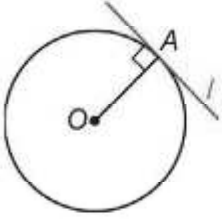
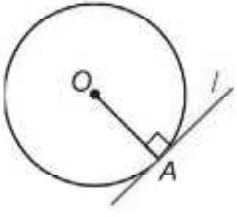
Если $d<R$, то окружность и прямая пересекаются. Имеют 2 общих точки.

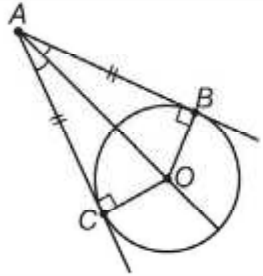


Если $d=R$, то окружность и прямая касаются. Имеют 1 общую точку.

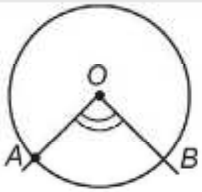


Если $d>R$, то окружность и прямая не пересекаются. Не имеют общих точек.

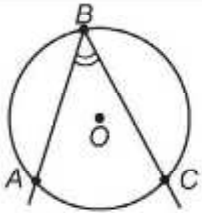
Свойство касательной к окружности	Признак касательной к окружности
Касательная к окружности перпендикулярна к радиусу, проведенному в точку касания. Если *l* – касательная, A – точка касания, то $OA \perp l$. 	Если прямая проходит через конец радиуса, лежащий на окуржности, и перпендикулярна к этому радиусу, то она является касательной. Если $OA \cap l = A$ и $OA \perp l$, то *l* – касательная. 



Отрезки касательных к окружности, проведенные из одной точки, равны и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности.
Если AB, AC – касательные, то $AB=AC$, $\angle BAO=\angle CAO$.

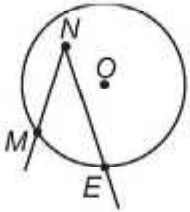


Угол, вершина которого лежит в центре окружности, а стороны пересекают ее, называется **центральным** углом.
$\angle AOB$ – центральный, $\angle AOB=\smile AB$.

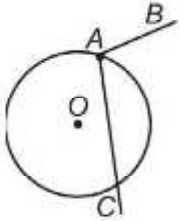


Угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают ее, называется **вписанным** углом.
То есть для того чтобы утверждать, что угол вписан в окружность, необходимо, чтобы выполнялись оба условия:
1) вершина лежит на окружности;
2) стороны угла пересекают окружность.

1) $N \notin$ Окр $(O;R)$
2) $MN \cap$ Окр.$(O;R)$ и
$NE \cap$ Окр.$(O;R)$
$\angle MNE$ – не является вписанным углом

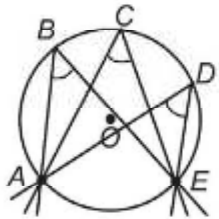
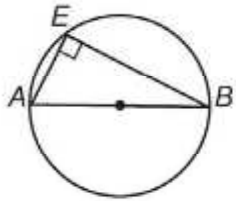
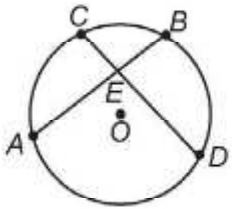


1) $A \in$ Окр$(O;R)$
2) $AC \cap$ Окр.$(O;R)$ и
$AB \not\cap$ Окр.$(O;R)$
$\angle BAC$ – не является вписанным углом

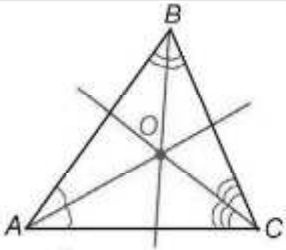


Вписанный угол равен половине дуги, на которую он опирается $\angle ABC = \frac{1}{2} \smile AC$.

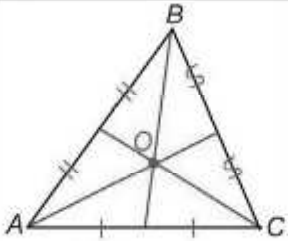
Свойства вписанных углов

	• вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны. $\angle ABE = \angle ACE = \angle ADE$
	• вписанный угол, опирающийся на полуокружность, – прямой. Если AB – диаметр окружности, то $\angle AEB = 90°$
	Если две хорды окружности пересекаются, то произведение отрезков одной хорды равно произведению отрезков другой хорды. Если $AB \cap CD = E$, то $AE \cdot EB = CE \cdot ED$

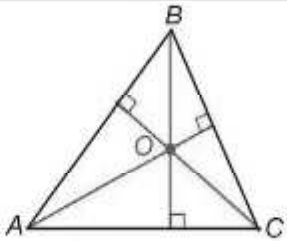
Четыре замечательные точки треугольника



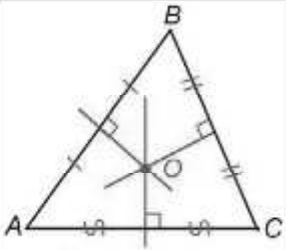
Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке



Медианы треугольника пересекаются в одной точке

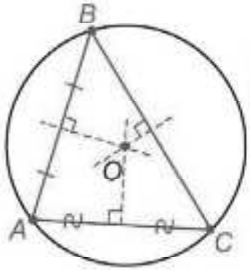


Высоты треугольника пересекаются в одной точке



Серединные перпендикуляры треугольника пересекаются в одной точке.

Треугольник, вписанный в окружность



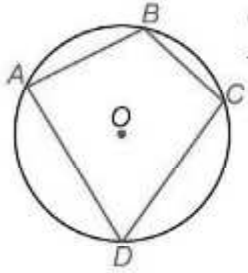
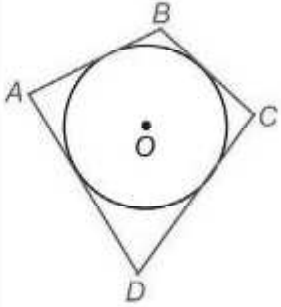
Треугольник называется **вписанным** в окружность, если все его вершины лежат на окружности.

Центр окружности, описанной около треугольника, лежит на пересечении серединных перпендикуляров.

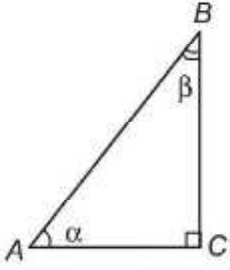
Треугольник, описанный вокруг окружности

Треугольник называется **описанным** около окружности, если все его стороны касаются окружности.

Центр окружности, вписанной в треугольник, лежит на пересечении биссектрис.

Четырехугольник, вписанный в окружность	Четырехугольник, описанный вокруг окружности
Четырехугольник можно вписать в окружность, если сумма противоположных углов равна 180°. 	Четырехугольник можно описать около окружности, если суммы противоположных сторон равны. 
Если $ABCD$ – вписанный четырехугольник, то $\angle A+\angle C=\angle B+\angle D=180°$. Обратно: если $\angle A+\angle C=\angle B+\angle D=180°$, то $ABCD$ – вписанный четырехугольник.	Если $ABCD$ – описанный четырехугольник, то $AB+CD=AD+BC$. Обратно: если $AB+CD=AD+BC$, то $ABCD$ – описанный четырехугольник.

Синус, косинус и тангенс острого угла прямоугольного треугольника



$$\sin\alpha=\frac{\text{противолежащий катет}}{\text{гипотенуза}}=\frac{BC}{AB}$$

$$\cos\alpha=\frac{\text{прилежащий катет}}{\text{гипотенуза}}=\frac{AC}{AB}$$

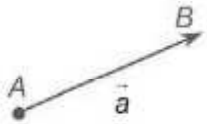
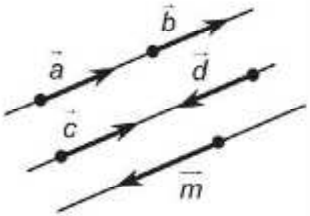
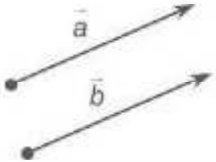
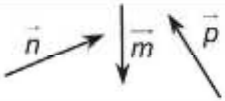
$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\text{противолежащий катет}}{\text{прилежащий катет}}=\frac{BC}{AC}$$

$$\sin\beta=\frac{AC}{AB};\quad \cos\beta=\frac{BC}{AB};\quad \operatorname{tg}\beta=\frac{AC}{BC}$$

α	30°	45°	60°
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg}\alpha$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$ – основное тригонометрическое тождество.

Векторы

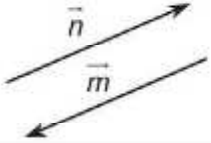
	**Вектор** – направленный отрезок. Обозначение $\overrightarrow{AB}$ или $\vec{a}$. A – начало вектора, B – конец.
	**Нулевой вектор** – вектор, начало и конец которого совпадают. Обозначение $\overrightarrow{MM}$ или $\vec{0}$.
Длиной вектора (абсолютной величиной вектора) называется длина отрезка. Обозначение $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert$ или $\lvert\vec{a}\rvert$.	
	**Коллинеарные векторы** – ненулевые векторы, которые лежат на одной прямой или на параллельных прямых. Если коллинеарные векторы направлены в одну сторону относительно прямой, прохождящей через их начало, то векторы называются **сонаправленными**, если в разные стороны – то **противоположно направленными**.
	$\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$; $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{c}$ – сонаправленные, $\vec{c}\uparrow\downarrow\vec{d}$; $\vec{b}\uparrow\downarrow\vec{d}$ – потивоположно направленные.
	**Неколлинеарные векторы**

Векторы называются **равными**, если они сонаправлены и их длины равны.

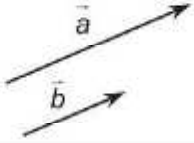
Так как $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$; $|\vec{a}|=|\vec{b}|$, то $\vec{a}=\vec{b}$

Чтобы утверждать, что векторы равны, необходимо, чтобы выполнялись оба условия:

1) векторы сонаправлены; 2) длины их равны.



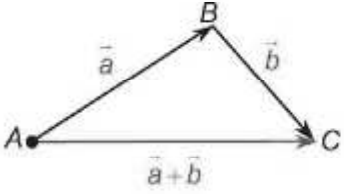
1) $\vec{n}\uparrow\downarrow\vec{m}$; 2) $|\vec{n}|=|\vec{m}|$, то $\vec{n}\neq\vec{m}$.



1) $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$; 2) $|\vec{a}|\neq|\vec{b}|$, то $\vec{a}\neq\vec{b}$

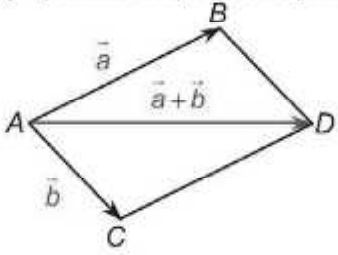
Сложение и вычитание векторов

1) Правило треугольника



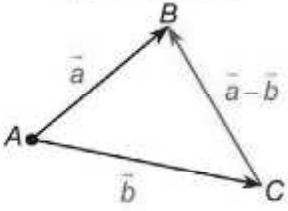
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

2) Правило параллелограмма



$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$

3) Вычитание



$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$

Умножение вектора на число

Произведение ненулевого вектора $\vec{a}$ на число k называется такой **вектор** $\vec{b}$, длина которого равна $|k|\cdot|\vec{a}|$;

если $k>0$, то $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$;

если $k<0$, то $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$.

Законы сложения и умножения векторов

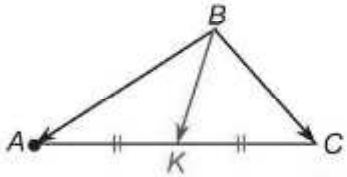
1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ – переместительный закон

2) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ – сочетательный закон

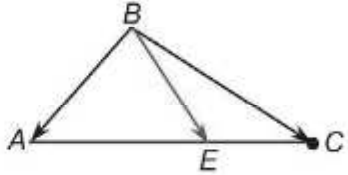
3) $(kl)\vec{a}=k\cdot(l\vec{a})=l\cdot(k\vec{a})$ – сочетательный закон

4) $(k+l)\vec{a}=k\cdot\vec{a}+l\cdot\vec{a}$ – I распределительный закон

5) $k\cdot(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$ – II распределительный закон



Если K – середина AC, то $\overrightarrow{BK}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})$

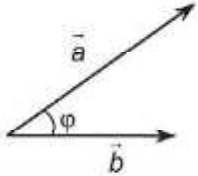


Если $Ab : bC=m : n$, то $\overrightarrow{BE}=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{BA}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{BC}$

Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением двух векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними.

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi$$



Если $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$, то $\varphi=90°$, то есть $\vec{a}\perp\vec{b}$.

Если $\vec{a}\cdot\vec{b}>0$, то φ – острый.

Если $\vec{a}\cdot\vec{b}<0$, то φ – тупой.

Свойства скалярного произведения для любых $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и любого числа k.

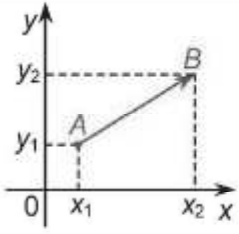
1) $\vec{a}^2 \geq 0$

2) $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$ – переместительный

3) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{c} + \vec{b}\cdot\vec{c}$ – распределительный

4) $(k\cdot\vec{a})\cdot\vec{b} = k\cdot(\vec{a}\cdot\vec{b})$ – сочетательный

Метод координат



$\overrightarrow{AB}\ \{x_2 - x_1; y_2 - y_1\}$ – координаты вектора

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Если $\vec{a}\ \{x_1; y_1\}$ и $\vec{b}\ \{x_2; y_2\}$, то

1) $\vec{a}+\vec{b}\ \{x_1 + x_2; y_1 + y_2\}$

2) $\vec{a}-\vec{b}\ \{x_1 - x_2; y_1 - y_2\}$

3) $k\vec{a}\ \{kx_1; ky_1\}$

4) $\vec{a}\cdot\vec{b}\ (x_1\cdot x_2; +y_1\cdot y_2)$

5) $\cos\varphi = \dfrac{x_1\cdot x_2 + y_1\cdot y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$,

φ – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Пример: $\vec{a}\{-1; 2\}$; $\vec{b}\{0; -3\}$.

1) $\vec{a}+\vec{b}\ \{-1+0; 2-3\} = \{-1; -1\}$

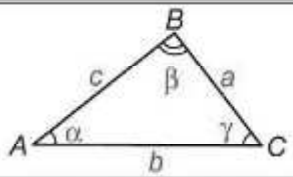
2) $\vec{a}-\vec{b}\ \{-1-0; 2-(-3)\} = \{-1; 5\}$

3) $5\vec{a}\ \{5\cdot(-1); 5\cdot 2\} = \{-5; 10\}$

4) $\vec{a}\cdot\vec{b}\ \{-1\cdot 0 + 2\cdot(-3)\} = 0 - 6 = -6$.

5) $\cos\varphi = \dfrac{-1\cdot 0 + 2\cdot(-3)}{\sqrt{1+4}\cdot\sqrt{0+9}} = \dfrac{-6}{3\sqrt{5}} = -\dfrac{2}{\sqrt{5}} < 0$,

значит $\varphi > 90°$.



• **Площадь треугольника** $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$.

Площадь треугольника равна половине произведения двух сторон на синус угла между ними.

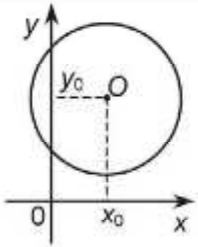
• **Теорема синусов:** стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов.

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$, R – радиус описанной окружности

• **Теорема косинусов:** квадрат стороны равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$$

Уравнение окружности



$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

(x_0, y_0) – координаты центра окружности, R – радиус.

Если центр окружности лежит в начале системы координат, то уравнение имеет вид: $x^2+y^2=R^2$.

Уравнение прямой

$ax + by + c = 0$, где a, b, c – числа.

$y = 0$ – уравнение оси абсцисс.

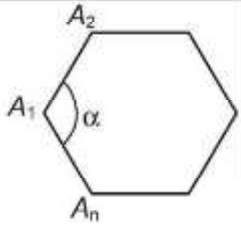
$x = 0$ – уравнение оси ординат.

$y = d$ – уравнение прямой, параллельной оси абсцисс.

$x = d$ – уравнение прямой, параллельной оси ординат.

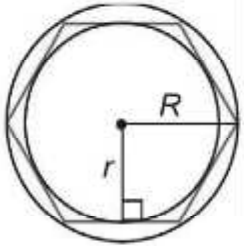
Правильные многоугольники

Правильным многоугольником называется выпуклый многоугольник, у которого все стороны и все углы равны.



$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 180° \cdot (n-2)$ – сумма всех углов n–угольника.

$\alpha = \frac{180° \cdot (n-2)}{n}$ – величина угла правильного n–угольника.



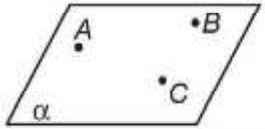
$S = \frac{1}{2} P \cdot r$ – площадь правильного n–угольника равна половине произведения периметра n–угольника на радиус окружности, вписанной в n–угольник.

$a_n = 2R \cdot \sin\frac{180°}{n}$ – сторона правильного многоугольника через радиус окружности, описанной около правильного многоугольника.

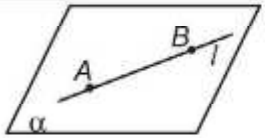
$r = R\cos\frac{180°}{n}$

Правильный n-угольник	R	r	P	S
Треугольник a_3	$R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$	$r = \frac{a_3\sqrt{3}}{6}$	$P_3 = 3a_3$	$S_3 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$
Квадрат a_4	$R = \frac{a_4\sqrt{2}}{2}$	$r = \frac{a_4}{2}$	$P_4 = 4a_4$	$S_4 = a^2$
Шестиугольник a_6	$R = a_6$	$r = \frac{a_6\sqrt{3}}{2}$	$P_6 = 4a_6$	$S_6 = \frac{a^2 3\sqrt{3}}{2}$

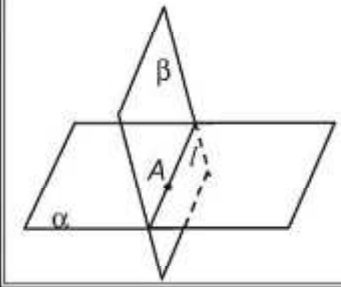
Аксиомы стереометрии



1. Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит плоскость, и притом только одна.
Если A, B, $C \notin l$, то $\exists \alpha$., что A, B, $C \subset l$, причем α – единственная.

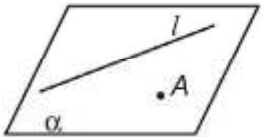


2. Если две точки прямой лежат в плоскости, то все точки этой прямой лежат в данной плоскости.
Если A, $B \in l$; A, $B \subset \alpha$, то $l \subset \alpha$.

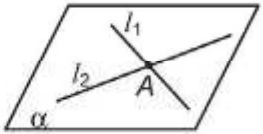


3. Если две различные плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой, проходящей через эту точку.
Если $A \subset \alpha$, $A \subset \beta$, то $\alpha \cap \beta = l$, где $A \in l$.

Существование плоскости

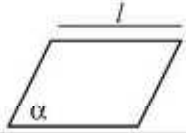
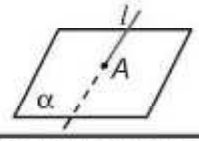


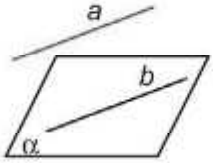
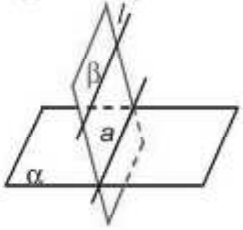
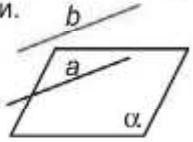
1. Через прямую и не лежащую на ней точку можно провести плоскость, и притом только одну.



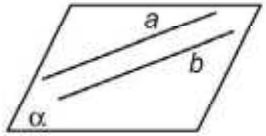
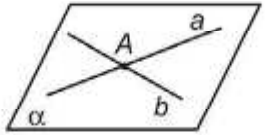
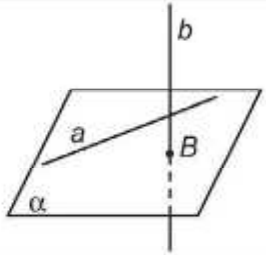
2. Через две пересекающиеся прямые можно провести плоскость, и притом только одну.

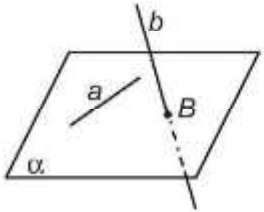
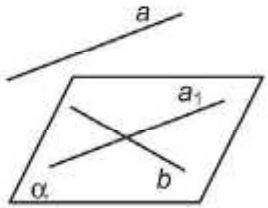
Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве

		
1. Прямая лежит в плоскости. $l \subset \alpha$	2. Прямая и плоскость не имеют общих точек, то есть прямая параллельна плоскости. $l \parallel \alpha$	3. Прямая и плоскость имеют одну общую точку, то есть прямая пересекает плоскость. $l \cap \alpha = A$

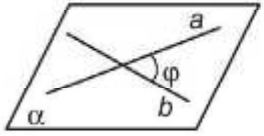
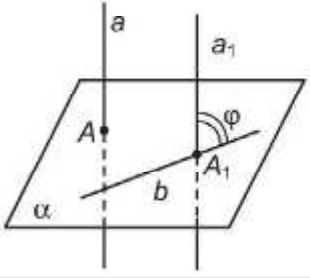
Признак параллельности прямой и плоскости	Свойства
Если прямая, не лежащая в данной плоскости, параллельна какой-нибудь прямой, лежащей в этой плоскости, то она параллельна данной прямой. Если $a \not\subset \alpha$, $b \subset \alpha$, $a \parallel b$, то $a \parallel \alpha$ 	1. Если плоскость проходит через данную прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то линия пересечения плоскостей параллельна данной прямой. Если $l \parallel \alpha$, $l \subset \beta$, $\beta \cap \alpha = a$, то $l \parallel a$. 
	2. Если одна из параллельных прямых лежит на данной плоскости, то другая прямая либо также параллельна данной плоскости, либо лежит в этой плоскости. Если $a \parallel b$, $a \parallel \alpha$, то $b \parallel \alpha$, или $b \subset \alpha$ 

Взаимное расположение прямых в пространстве

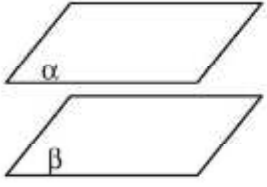
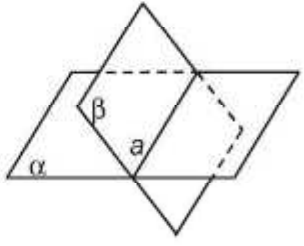
		
Две прямые лежат в одной плоскости и не имеют общих точек, то есть *a* и *b* параллельные прямые. $a \parallel b$	Две прямые лежат в одной плоскости и имеют одну общую точку, то есть *a* и *b* пересекающиеся прямые. $a \cap b$	Две прямые не лежат в одной плоскости, то есть *a* и *b* скрещивающиеся прямые. $a \times b$

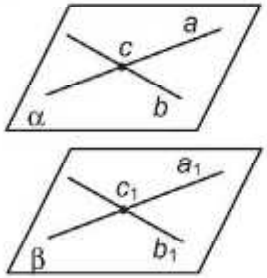
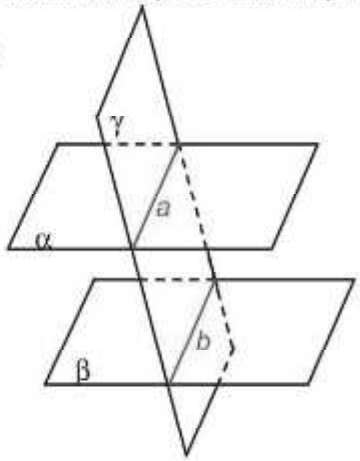
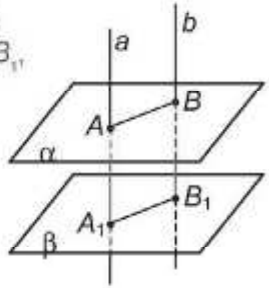
Признак скрещивающихся прямых	Теорема о скрещивающихся прямых
Если одна из двух прямых лежит в некоторой плоскости, а другая прямая пересекает эту плоскость в точке, не лежащей на первой прямой, то эти прямые скрещивающиеся. Если $a \subset \alpha$, $b \cap \alpha = B$, $B \notin a$, то *a*, *b* – скрещивающиеся. 	Через каждую из двух скрещивающихся прямых проходит плоскость, параллельная другой прямой, и притом только одна. Если $a \times b$, то $\exists \alpha$: $b \subset \alpha$ и $\alpha \parallel a$ причем α – единственная. 

Угол между прямыми

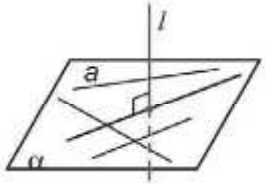
	Если a и b лежат в одной плоскости и пересекаются, то образуется 4 неразвернутых угла. Угол $0° < \varphi \leq 90°$ называется углом между прямыми a и b.
	Если a и b скрещивающиеся прямые, то через произвольную точку $A_1 \in b$ проведем прямую a_1 параллельную a, тогда $\angle(a,b)=\angle(a_1,b)=\varphi$

Параллельность плоскостей

	
Две плоскости не имеют общих точек, то есть плоскости α и β параллельны. $\alpha \parallel \beta$	Две пллоскости имеют общие точки, то есть плоскости α и β пересекаются. $\alpha \cap \beta = a$

Признак параллельности плоскостей	Свойства параллельных плоскостей
Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны. Если $a, b \subset \alpha$, $a \cap b = c$, $a_1, b_1 \subset \beta$, $a_1 \cap b_1 = c_1$, $a \parallel a_1$, $b \parallel b_1$, то $\alpha \parallel \beta$.  	1. Если две параллельные плоскости пересечены третьей, то линии их пересечения параллельны. Если $\alpha \parallel \beta$, $\gamma \cap \alpha = a$, $\gamma \cap \beta = b$, то $a \parallel b$.  2. Отрезки параллельных прямых, заключенные между параллельными плоскостями, равны. Если $a \parallel b$, $\alpha \parallel \beta$, $a \cap \alpha = A$, $b \cap \alpha = B$, $a \cap \beta = A_1$, $b \cap \beta = B_1$, то $AA_1 = BB_1$. 

Перпендикулярность прямой и плоскости

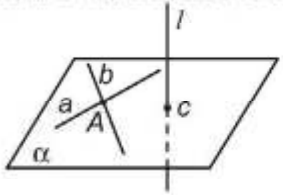


Прямая называется **перпендикулярной** к плоскости, если она перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости.

Признак перпендикулярности прямой и плоскости

Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости.

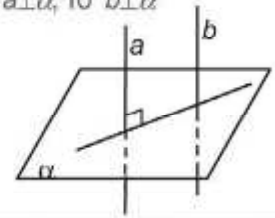
Если $a, b \subset \alpha$, $a \cap b = A$, $l \perp a$, $l \perp b$, то $l \perp \alpha$



Связь между параллельностью прямых и перпендикулярностью к плоскости

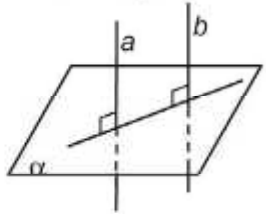
1. Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна плоскости, то и другая прямая перпендикулярна этой плоскости.

Если $a \parallel b$, $a \perp \alpha$, то $b \perp \alpha$

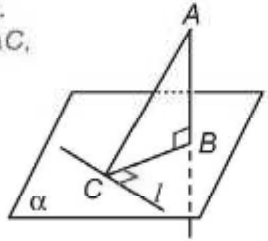
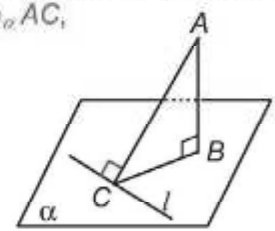


2. Если две прямые перпендикулярны к плоскости, то они параллельны.

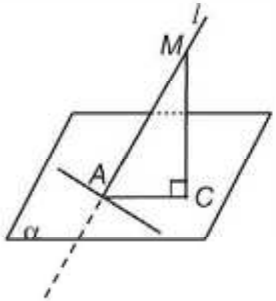
Если $a \perp \alpha$, $b \perp \alpha$, то $a \parallel b$.



Теорема о трех перпендикулярах

Прямая	Обратная
Прямая, проведенная в плоскости через основание наклонной перпендикулярно ее проекции на эту плоскость, перпендикулярна и самой плоскости. Если $AB \perp \alpha$, $BC = \text{пр}_\alpha AC$, $l \perp BC$, то $l \perp AC$.  	Прямая, проведенная в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к ней, перпендикулярна и к ее проекции. Если $AB \perp \alpha$, $BC = \text{пр}_\alpha AC$, $l \perp AC$, то $l \perp BC$. 

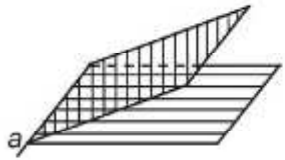
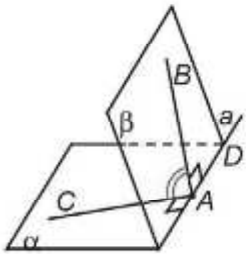
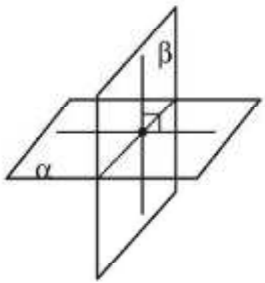
Угол между прямой и плоскостью

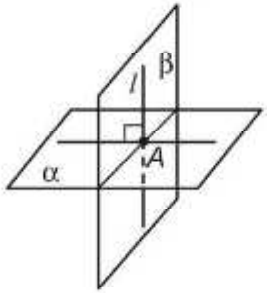
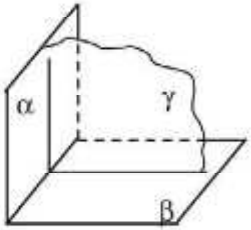
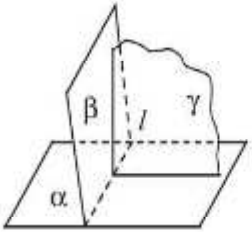
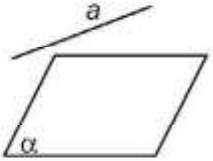


Углом между прямой и плоскостью, пересекающей эту прямую и не перпендикулярной к ней, называется угол между прямой и ее проекцией на плоскость.

Если l – прямая, α – плоскость, $MC \perp \alpha$, $AC = \text{пр}_\alpha l$, то $\angle MAC$ – угол между прямой l и плоскостью α.

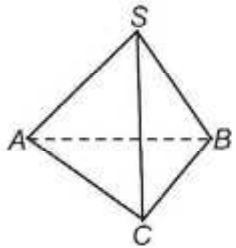
Двугранный угол

	Двугранным углом называется фигура, образованная прямой и двумя полуплоскостями с общей границей *a*, не принадлежащими одной плоскости.
	Если $BA \perp a$, $AB \subset \beta$, $CA \perp a$, $AC \subset \alpha$, то $\angle BAC$ – линейный угол двугранного угла $BADC$.
	Две пересекающиеся плоскости называются перпендикулярными, если угол между ними прямой.

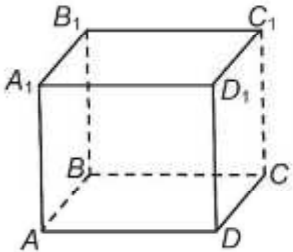
Признак перпендикулярности плоскостей	Следствия
Если одна из двух плоскостей проходит через прямую, перпендикулярную к другой плоскости, то такие плоскости перпендикулярны. Если $l \subset \beta$, $l \perp \alpha$, $l \cap \alpha = A$ $\Downarrow$ то $\alpha \perp \beta$  	Прямая, перпендикулярная к прямой, по которой пересекаются две данные плоскости, перпендикулярна к каждой из этих плоскостей. Если $\alpha \cap \beta = a$ $\gamma \perp \alpha$ $\Downarrow$ то $\gamma \perp \alpha$ и $\gamma \perp \beta$ 
Прямая пересечения двух плоскостей, перпендикулярных к третьей плоскости, также перпендикулярна этой плоскости. Если $\alpha \cap \beta = l$, $\alpha \perp \gamma$, $\beta \perp \gamma$, то $l \perp \gamma$  	Через любую прямую a, не перпендикулярную к плоскости α, можно провести плоскость β, перпендикулярную α, и притом только одну. Если $a \not\subset \alpha$, $a \not\perp \alpha$, то $\exists \beta$: $a \subset \beta$, $\beta \perp \alpha$ и β – единственная 

Многогранники

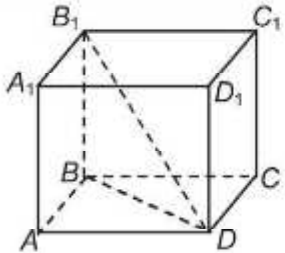
Поверхность, составленную из многоугольников и ограничивающую некоторое геометрическое тело, называют **многогранником**.



Тетраэдр – многогранник, составленный из 4 треугольников. Правильный тетраэдр – все грани правильные треугольники.



Многогранник, составленный из двух равных параллелограммов, лежащих в параллельных плоскостях, и четырех параллелограммов, назывется **параллелепипедом**. Обозначение: $ABCDA_1B_1C_1D_1$



Параллелепипед называется прямоугольным, если его боковые ребра перпендикулярны к основанию, а основания – прямоугольники.

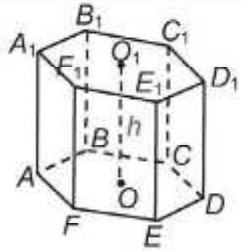
Свойства параллелепипеда

1. Противоположные грани параллельны и равны.

2. Диагонали пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам.

3. Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трех его измерений.
$B_1D^2=AB^2+BC^2+BB_1^2$

Призма

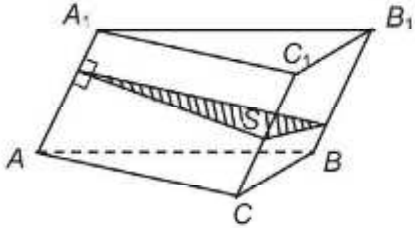


Многогранник, составленный из двух равных многоугольников, расположенных в параллельных плоскостях, и n параллелограммов, называется **призмой**.
Равные многоугольники – основания призмы.
n параллелограммы – боковые грани призмы.
стороны параллелограммов — ребра призмы.

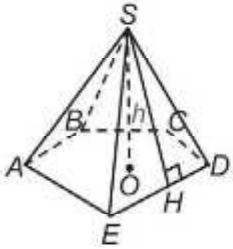
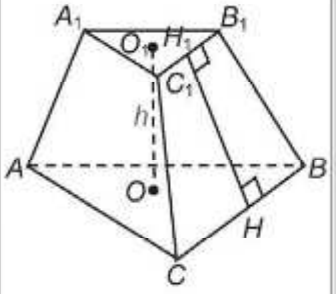
Если боковые ребра призмы перпендикулярны к основаниям, то призма называется **прямой**.

Прямая призма называется правильной, если ее основания – правильные многоугольники.

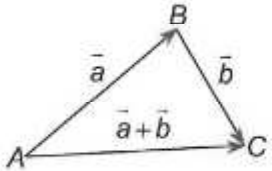
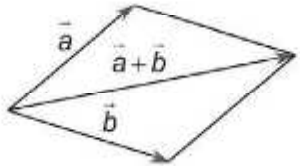
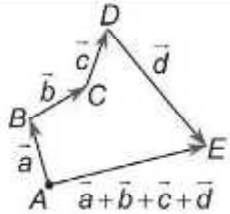
$$S_{бок.пов}=m_{осн}\cdot h;\ S_{полн.пов.}=S_{бок.пов}+2S_{осн.};\ V=S_{осн.}\cdot h.$$

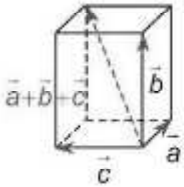
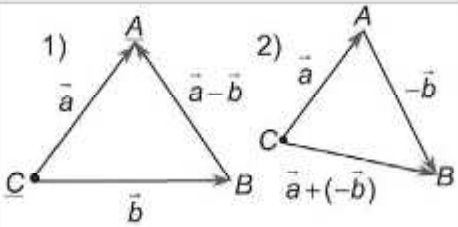
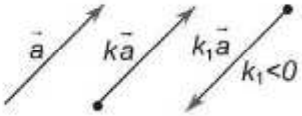


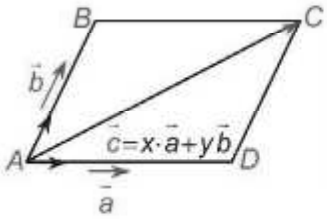
Объем наклонной призмы равен произведению площади перпендикулярного сечения на боковое ребро.
$V=S_{сеч}\cdot AA_1$

	Многогранник, составленный из n–угольника и n треугольников, называется **пирамидой**. $SO\perp(ABC)$ – высота пирамиды; n-угольник – основание; треугольники – боковые грани. Пирамида называется правильной, если ее основание – правильный многоугольник, а основание высоты пирамиды – центр вписанной (или описанной) в многоугольник окружности.
	$S_{бок}=\frac{1}{2}P_{осн}\cdot SH$, где SH – апофема, высота боковой грани правильной пирамиды. $S_{осн}=\frac{1}{2}P_{осн}\cdot r$, где r – радиус вписанной окружности. $S_{полн}=S_{бок}+S_{осн}$. $V=\frac{1}{3}S_{осн}\cdot K$
	Усеченная пирамида – часть пирамиды, заключенная между основанием и секущей плоскостью, параллельной основанию. $S_{бок}=\frac{P_1+P_2}{2}\cdot HH_1$, где m_1 и m_2 – периметры оснований; HH_1 – высота боковой грани правильной усеченной пирамиды; $V=\frac{1}{3}K\cdot\left(S_1+S_2+\sqrt{S_1\cdot S_2}\right)$, где S_1 и S_2 – площади оснований; $h=OO_1$ – высота усеченной пирамиды.

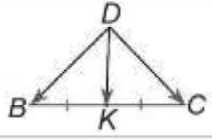
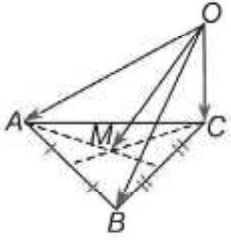
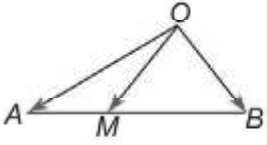
Сложение векторов

Правило треугольника	Правило параллелограмма	Правило многоугольника
 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$	 $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (переместительный закон) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (сочетательный закон)	 $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}$

Сложение векторов Правило параллелепипеда	Вычитание векторов	Умножение векторов на число
	 $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}$	 **Свойства:** 1. $(kl)\vec{a}=k(l\vec{a})$ (сочетательный закон) 2. $k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$

Компланарные векторы – векторы, имеющие равные им векторы, лежащие в одной плоскости.	
	Если вектор $\vec{c}$ можно разложить по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в виде $\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}$, где x, y – числа, то векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ – компланарны.

Свойства векторов

	$\overline{DK}=\frac{1}{2}\left(\overline{DB}+\overline{DC}\right)$, где K – середина отрезка BC, a – произвольная точка пространства.
	$\overline{OM}=\frac{1}{3}\left(\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}\right)$, где M – точка пересечения медиан ΔABC, O – произвольная точка пространства.
	O – произвольная точка пространства, если $\overline{AM}=\lambda\cdot\overline{MB}$, где $\lambda\neq-1$, то $\overline{OM}=\frac{\overline{OA}+\lambda\overline{OB}}{1+\lambda}$

Метод координат в пространстве

Координаты вектора	Координаты середины отрезка
$\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\}$, $\vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$	$A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$
$\vec{a}+\vec{b}=\{x_1+x_2; y_1+y_2; z_1+z_2\}$	C – середина AB
$\vec{a}-\vec{b}=\{x_1-x_2; y_1-y_2; z_1-z_2\}$	$c\left(\frac{x_1+x_2}{2}; \frac{y_1+y_2}{2}; \frac{z_1+z_2}{2}\right)$
$\alpha\vec{a}\{\alpha\overrightarrow{x_1}; \alpha\overrightarrow{y_1}; \alpha\overrightarrow{z_1}\}$	$\overrightarrow{AB}\{x_2-x_1; y_2-y_1; z_2-z_1\}$

Если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – коллинарные векторы, то $\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}=k$ соответствующие координаты пропорциональны. Если $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – компланарны, то любой вектор можно выразить через два других.

$$\vec{a}=\alpha\cdot\vec{b}+\beta\cdot\vec{c}\ \begin{cases} x_1=\alpha x_2+\beta x_3 \\ y_1=\alpha y_2+\beta y_3 \\ z_1=\alpha z_2+\beta z_3 \end{cases},\ \text{где}\ \begin{matrix} \vec{a}\{x_1; y_1; z_1\} \\ \vec{b}\{x_2; y_2; z_2\} \\ \vec{c}\{x_3; y_3; z_3\} \end{matrix}$$

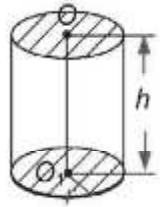
Длина вектора

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2},\ \text{где}\ A(x_1;y_1;z_1);\ B(x_2;y_2;z_2)$$

$$\text{или}\ |\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2},\ \text{где}\ \vec{a}\{x; y; z\}.$$

Скалярное произведение векторов	Свойства скалярного произведения
$\vec{a}\cdot\vec{b}=\lvert\vec{a}\rvert\cdot\lvert\vec{b}\rvert\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$	1. $\overrightarrow{a^2}\geq 0$, причем $\overrightarrow{a^2}>0$ при $\vec{a}\neq 0$
$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$	2. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ (переместительный закон)
$\cos\alpha=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$	3. $(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$ (распределительный закон)
	4. $(k\vec{a})\vec{b}=k(\vec{a}\cdot\vec{b})$ (сочетательный закон)

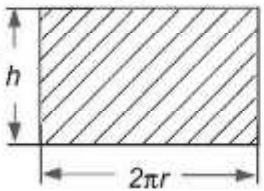
Цилиндр



$S_{бп}=2\pi rh$

$S_{пп}=2\pi r(r+h)$

$V=S_{осн}\cdot h=\pi r^2h$



Тело, ограниченное цилиндрической поверхностью и двумя кругами, называется **цилиндром**.

Цилиндр может быть получен вращением прямоугольника вокруг одной из его сторон.

Развертка – прямоугольник.

Конус

$S_{бп}=\pi rl$

$S_{пп}=\pi r(l+r)$

$V=\frac{1}{3}\pi r^2K$

$S_{бок}=\frac{\pi l^2}{360^\circ}\cdot\alpha$

Тело, ограниченное конической поверхностью и кругом, с границей, называется **конусом**.

Конус может быть получен вращением прямоугольного треугольника вокруг одного из его катетов.

Развертка – круговой сектор.

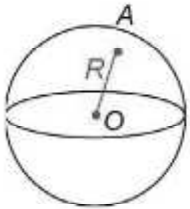
Усеченный конус

Усеченный конус – часть конуса, заключенная между основанием и секущей плоскостью, параллельной основанию.
Усеченный конус может быть получен вращением прямоугольной трапеции вокруг ее боковой стороны, перпендикулярной основаниям.
$S_{бп}=\pi(r+r_1)l$

$V=\frac{1}{3}K\left(S+S_1+\sqrt{S\cdot S_1}\right)$; S и S_1 – площади оснований.

или $V=\frac{1}{3}\pi K(r^2+r_1^2+r\cdot r_1)$

Сфера

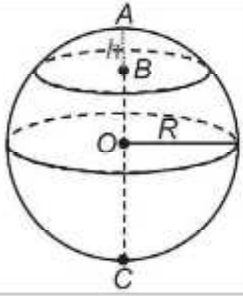


Сферой называется поверхность, состоящая из всех точек пространства, расположенных на данном расстоянии от данной точки. Сфера может быть получена вращением полуокружности вокруг ее диаметра.
$S=4\pi R^2$ – площадь поверхности сферы.

Уравнение сферы

$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$, где $(x_0; y_0; z_0)$ – координаты центра сферы,
$(x; y; z)$ – координаты точки сферы, R – радиус сферы.
Если центр сферы совпадает с началом системы отсчета, то уравнение имеет вид
$x^2+y^2+z^2=R^2$.

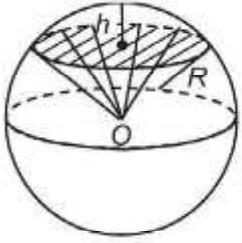
Шар – тело, ограниченное сферой. $V_{шара} = \frac{4}{3}\pi R^3$.



Шаровой сегмент – часть шара, отсекаемая от него плоскостью. AB и BC – высоты получившихся сегментов.

$V_c = \pi h^2 \cdot \left(R - \frac{1}{3}h\right)$, где R – радиус шара, h – высота сегмента.

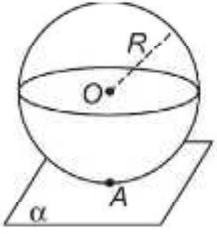
Шаровой слой – часть шара, заключенная между двумя параллельными секущими плоскостями.



Шаровой сектор – тело, полученное вращением кругового сектора с углом, меньшим 90°, вокруг прямой, содержащей один из ограничивающих круговой сектор радиусов.

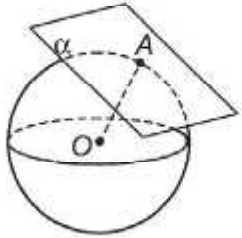
$V = \frac{2}{3}\pi R^2 K$.

Касательная к сфере

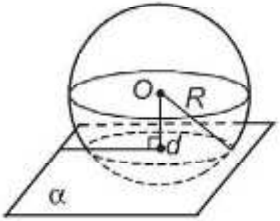
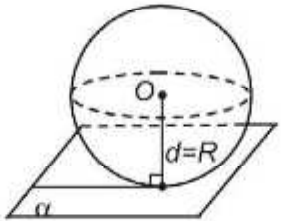
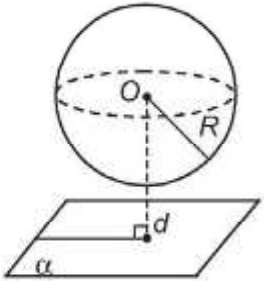


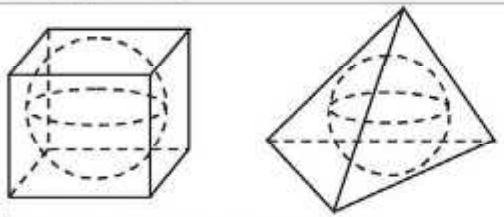
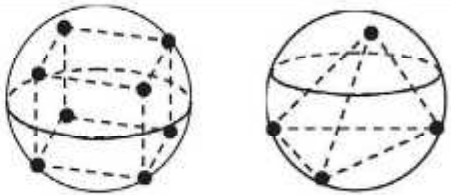
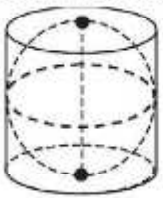
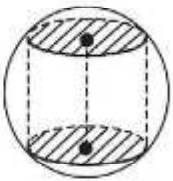
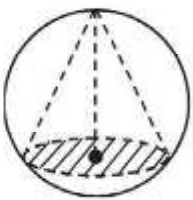
Плоскость, имеющая со сферой одну общую точку, называется **касательной** к сфере, а их общая точка – **точкой касания** плоскости и сферы.

Свойство касательной к сфере	Признак касательной к сфере
Радиус сферы, проведенный в точку касания сферы и плоскости, перпендикулярен к касательной плоскости. Если α – касательная, A – точка касания, то $OA \perp \alpha$	Если радиус сферы перпендикулярен к плоскости, проходящей через его конец, лежащий на сфере, то эта плоскость является касательной к сфере. Если $A \subset \alpha$, $OA=R$, $OA \perp \alpha$, то α – касательная к сфере.



Взаимное расположение сферы и плоскости в пространстве

d – расстояние от центра до плоскости; R – радиус сферы		
		
$d<R$, сфера и плоскость имеют много общих точек, т.е. пересекаются по окружности	$d=R$, сфера и плоскость имеют одну общую точку, т.е. плоскость касается сферы	$d>R$, сфера и плоскость не имеют общих точек, т.е. плоскость и сфера не пересекаются

Сфера, вписанная в многогранник, цилиндр и конус	Сфера, описанная вокруг многогранника, цилиндра, конуса
 Сфера вписана в многогранник, если она касается всех его граней.	 Сфера описана вокруг многогранника, если все вершины его лежат на сфере.
 Сфера вписана в цилиндр, если она касается оснований и боковой поверхности.	 Сфера описана вокруг цилиндра, если его основания являются сечением сферы.
 Сфера вписана в конус, если она касается конической поверхности и основания.	 Сфера описана вокруг конуса, если вершина лежит на сфере, а основание конуса является сечением сферы.