

---

# **Формулы по теории вероятностей**

## **I. Случайные события**

### **1. Основные формулы комбинаторики**

а) перестановки  $P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1) \cdot n$ .

б) размещения  $A_n^m = n \cdot (n-1) \dots (n-m+1)$ .

в) сочетания  $C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$ .

### **2. Классическое определение вероятности.**

$P(A) = \frac{m}{n}$ , где  $m$  - число благоприятствующих событию  $A$  исходов,  $n$  - число всех элементарных равновозможных исходов.

### **3. Вероятность суммы событий**

Теорема сложения вероятностей несовместных событий:

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

Теорема сложения вероятностей совместных событий:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

### **4. Вероятность произведения событий**

Теорема умножения вероятностей независимых событий:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$$

Теорема умножения вероятностей зависимых событий:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B | A),$$

$$P(A \cdot B) = P(B) \cdot P(A | B).$$

$P(A | B)$  - условная вероятность события  $A$  при условии, что произошло событие  $B$ ,

$P(B | A)$  - условная вероятность события  $B$  при условии, что произошло событие  $A$ .

### **5. Формула полной вероятности**

$$P(A) = \sum_{k=1}^n P(H_k)P(A | H_k), \text{ где } H_1, H_2, \dots, H_n \text{ - полная группа гипотез, то есть}$$

$$H_i \cdot H_j = \emptyset, i \neq j, \bigcup_{i=1}^n H_i = \Omega, \Omega \text{ - достоверное событие.}$$

### **6. Формула Байеса (формула Бейеса). Вычисление апостериорных вероятностей гипотез**

$$P(H_m | A) = \frac{P(H_m)P(A | H_m)}{\sum_{k=1}^n P(H_k)P(A | H_k)}, m = 1, \dots, n, \text{ где } H_1, H_2, \dots, H_n \text{ - полная группа гипотез.}$$

## **7. Формула Бернулли**

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \text{ - вероятность появления события ровно } k$$

раз при  $n$  независимых испытаниях,  $p$  - вероятность появления события при одном испытании.

## **8. Наивероятнейшее число наступления события.**

Наивероятнейшее число  $k_0$  появления события при  $n$  независимых испытаниях:

$$np - (1-p) \leq k_0 < np + p, \quad p \text{ - вероятность появления события при одном испытании.}$$

## **9. Локальная формула Лапласа**

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi\left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right) \text{ вероятность появления события ровно } k \text{ раз при } n \text{ независимых}$$

испытаниях,  $p$  - вероятность появления события при одном испытании,  $1=p-$ .

## **10. Интегральная формула Лапласа**

$$P_n(m_1, m_2) \approx \Phi\left(\frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}\right) \text{ - вероятность появления события не менее } k_1 \text{ и не}$$

более  $k_2$  раз при  $n$  независимых испытаниях,  $p$  - вероятность появления события при одном испытании,  $1=p-$ .

## **11. Оценка отклонения относительной частоты от постоянной вероятности $p$ :**

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon \sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}\right).$$

## **II. Случайные величины**

### **12. Ряд распределения дискретной случайной величины**

$x_i$	$x_1$	$x_2$	.....	$x_n$
$p_i$	$p_1$	$p_2$	.....	$p_n$

Сумма вероятностей всегда равна 1.  $\sum_{i=1}^n p_i = 1$

### **13. Функция распределения (интегральная функция распределения)**

Функция распределения случайной величины  $X$  определяется по формуле  $F(x) = P(X < x)$ . Это неубывающая функция, принимающая значения от 0 до 1. Если

задана плотность распределения  $f(x)$ , то функция распределения выражается как

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$$

#### 14. Плотность распределения (дифференциальная функция распределения)

Плотность распределения случайной величины  $X$  определяется по формуле

$f(x) = F'(x)$ . Существует только для непрерывной случайной величины. Для нее

выполняется условие нормировки:  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$  (площадь под кривой равна 1).

#### 15. Вероятность попадания случайной величины в заданный интервал

Может быть вычислена двумя способами:

1) через функцию распределения  $P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$

2) через плотность распределения  $P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$

#### 16. Математическое ожидание случайной величины

1) Для дискретной случайной величины  $X$ , заданной рядом распределения:

$$M(X) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot p_i$$

1) Для непрерывной случайной величины  $X$ , заданной плотностью распределения:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot x dx.$$

#### 17. Дисперсия случайной величины

По определению дисперсия – это второй центральный момент:

$$D(X) = M((X - M(X))^2) = M(X^2) - (M(X))^2.$$

1) Для дискретной случайной величины  $X$ , заданной рядом распределения:

$$D(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - M(X))^2 \cdot p_i = \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot p_i - (M(X))^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot p_i - \left( \sum_{i=1}^n x_i \cdot p_i \right)^2$$

1) Для непрерывной случайной величины  $X$ , заданной плотностью распределения:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot (x - M(X))^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot x^2 dx - (M(X))^2 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot x^2 dx - \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot x dx \right)^2.$$

#### 18. Среднее квадратическое отклонение случайной величины

$$\sigma = \sqrt{D(X)}$$

#### 19. Начальный момент r-го порядка случайной величины

$$\nu_r = M(X^r).$$

В частности, первый начальный момент – это математическое ожидание:

$$\nu_1 = M(X^1) = M(X)$$

## 20. Центральный момент $r$ -го порядка случайной величины

$$\mu_r = M((X - M(X))^r)$$

В частности, второй центральный момент – это дисперсия:

$$\mu_2 = M((X - M(X))^2) = D(X).$$

## 21. Асимметрия

$$A_s = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$

Коэффициент асимметрии положителен, если правый хвост распределения длиннее левого (правая часть кривой более пологая), и отрицателен в противном случае. Если распределение симметрично относительно математического ожидания, то его коэффициент асимметрии равен нулю.

## 22. Эксцесс

$$E = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$$

Коэффициент эксцесса нормального распределения равен нулю. Он положителен, если пик распределения около математического ожидания острый, и отрицателен, если пик гладкий.

# III. Распределения случайных величин

## 21. Биномиальное распределение (дискретное)

$X$  – количество «успехов» в последовательности из  $n$  независимых случайных экспериментов, таких что вероятность «успеха» в каждом из них равна  $p$ .  $1-p=q$ .

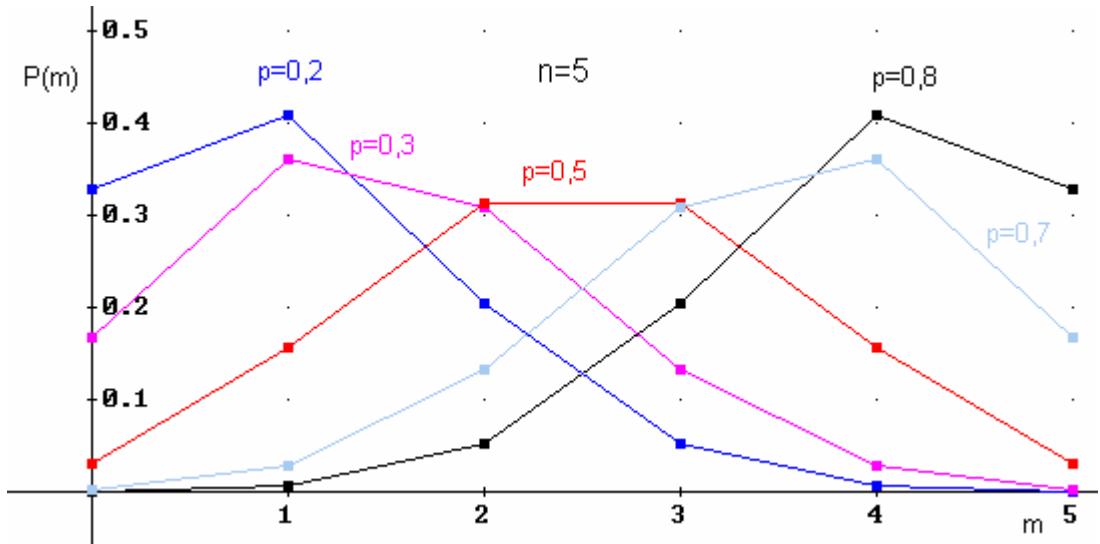
Закон распределения  $X$  имеет вид:

$x_k$	0	1	.....	$k$	.....	$n$
$p_k$	$q^n$	$n \cdot p \cdot q^{n-1}$		$C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$		$p^n$

Здесь вероятности находятся по формуле Бернулли:  $P(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = C_n^k p^k q^{n-k}$ .

Характеристики:  $M(X) = np$ ,  $D(X) = npq$ ,  $\sigma = \sqrt{npq}$

Примеры многоугольников распределения для  $n=5$  и различных вероятностей:



## 22. Пуассоновское распределение (дискретное)

Распределение Пуассона моделирует случайную величину, представляющую собой число событий, произошедших за фиксированное время, при условии, что данные события происходят с некоторой фиксированной средней интенсивностью и независимо друг от друга.

При условии  $p \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, np \rightarrow \lambda = const$  закон распределения Пуассона является предельным случаем биномиального закона. Так как при этом вероятность  $p$  события  $A$  в каждом испытании мала, то закон распределения Пуассона называют часто законом редких явлений.

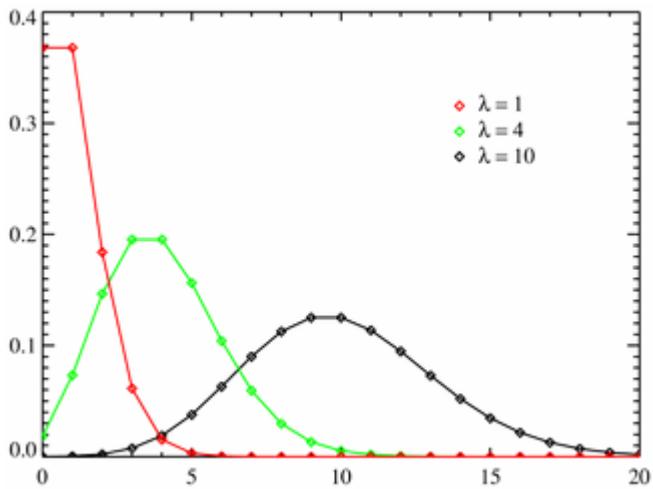
Ряд распределения:

$x_k$	0	1	.....	k	.....
$p_k$	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	.....	$\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$	.....

Вероятности вычисляются по формуле Пуассона:  $P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ .

Числовые характеристики:  $M(X) = \lambda$ ,  $D(X) = \lambda$ ,  $\sigma = \sqrt{\lambda}$

Разные многоугольники распределения при  $\lambda = 1; 4; 10$ .



### 23. Показательное распределение (непрерывное)

Экспоненциальное или показательное распределение — абсолютно непрерывное распределение, моделирующее время между двумя последовательными свершениями одного и того же события.

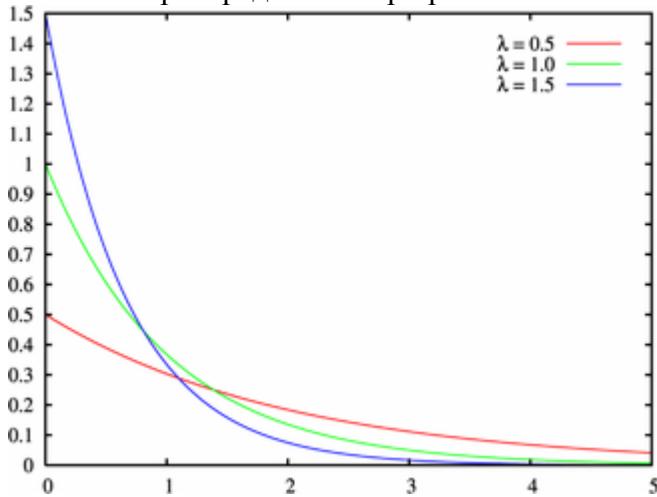
Плотность распределения:

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \lambda \cdot e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

Где  $\lambda > 0$ .

Числовые характеристики:  $M(X) = \frac{1}{\lambda}$ ,  $D(X) = \frac{1}{\lambda^2}$ ,  $\sigma = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$

Плотность распределения при различных значениях  $\lambda > 0$ .



### 24. Равномерное распределение (непрерывное)

Равномерный закон распределения используется при анализе ошибок округления при проведении числовых расчётов (например, ошибка округления числа до целого распределена равномерно на отрезке  $[-0.5; 0.5]$ ), в ряде задач массового обслуживания,

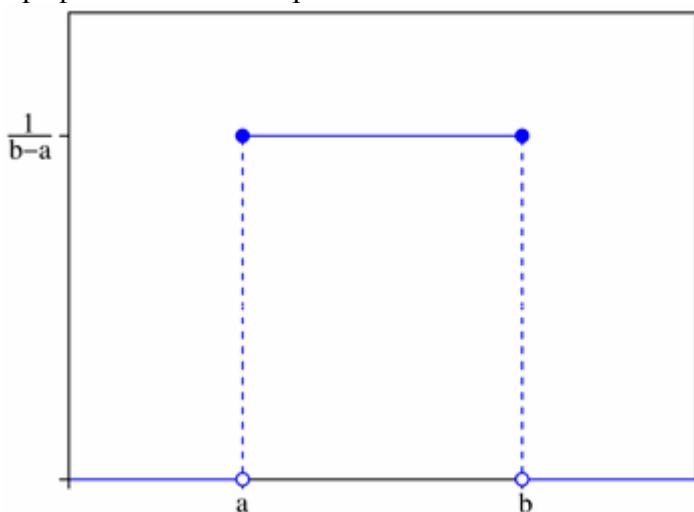
при статистическом моделировании наблюдений, подчинённых заданному распределению.

Плотность распределения:

$$p(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & x > b \end{cases}$$

Числовые характеристики:  $M(X) = \frac{a+b}{2}$ ,  $D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$ ,  $\sigma = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$

График плотности вероятностей:



## 25. Нормальное распределение или распределение Гаусса (непрерывное)

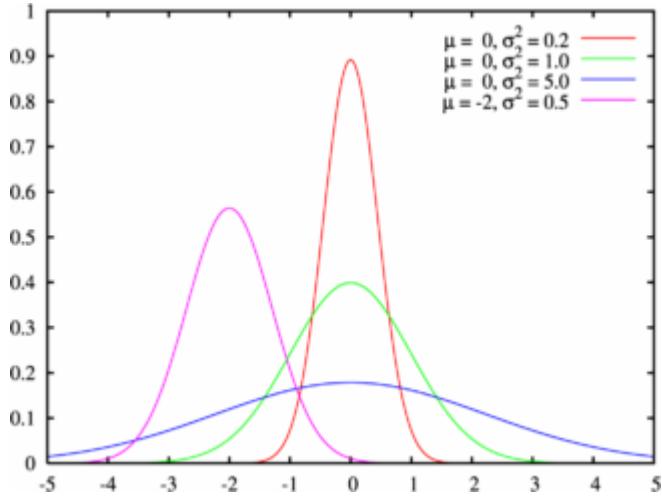
Нормальное распределение, также называемое распределением Гаусса, – распределение вероятностей, которое играет важнейшую роль во многих областях знаний, особенно в физике. Физическая величина подчиняется нормальному распределению, когда она подвержена влиянию огромного числа случайных помех. Ясно, что такая ситуация крайне распространена, поэтому можно сказать, что из всех распределений в природе чаще всего встречается именно нормальное распределение — отсюда и произошло одно из его названий.

Плотность распределения:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Числовые характеристики:  $M(X) = a$ ,  $D(X) = \sigma^2$ ,  $\sigma = \sigma$

Пример плотности распределения:



Нормальный закон распределения случайной величины с параметрами  $a=0$  и  $\sigma=1$  называется стандартным или нормированным, а соответствующая нормальная кривая - стандартной или нормированной.

$$\text{Функция Лапласа } \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt.$$

Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины  $X$  в заданный интервал  $(\alpha; \beta)$

$$(P)\alpha < X < \beta = \Phi\left(\frac{\beta - \alpha}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - \alpha}{\sigma}\right)$$

Вероятность отклонения нормально распределенной случайной величины  $X$  на величину  $\delta$  от математического ожидания (по модулю).

$$P(|X - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

#### IV. Другие формулы

##### 26. Неравенство Чебышева

$$(P(|X - M| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2})$$

##### 27. Неравенство Маркова

$$P(X \leq \varepsilon) > 1 - \frac{MX}{\varepsilon}$$

##### 28. Математическое ожидание функции одной случайной величины

$$M[\varphi(x)] = \sum_{i=1}^n \varphi(x_i) \cdot p_i$$

---

**29. Корреляционный момент системы случайных величин  $X$  и  $Y$**

$$\mu_{XY} = M([X]M(X)) \cdot [Y - M(Y)] = M(X \cdot Y) - M(X) \cdot M(Y)$$

**30. Коэффициент корреляции системы случайных величин  $X$  и  $Y$**

$$r_{XY} = \frac{\mu_{XY}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}$$

**31. Пуассоновский поток событий**

$$p_t(k) = \frac{(\lambda t)^k \cdot e^{-\lambda t}}{k!}$$